
Stanford University Libraries
3 6105 027 650 220

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES.

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE TOULOUSE,

POUR LES

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES,

PUBLIÉES

PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES,
DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE DE LA FACULTÉ,

SOUS LES AUSPICES

DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DE LA MUNICIPALITÉ DE TOULOUSE,

AVEC LE CONCOURS

DU CONSEIL GÉNÉRAL DE LA HAUTE-GARONNE.

TOME III. – ANNÉE 1889.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1889

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

ATTRACTION

D'UN ELLIPSOÏDE HOMOGÈNE

OU

COMPOSÉ DE COUCHES HOMOGÈNES SUR UN POINT EXTÉRIEUR;

PAR M. A. LEGOUX.

On connaît plusieurs méthodes pour calculer l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur.

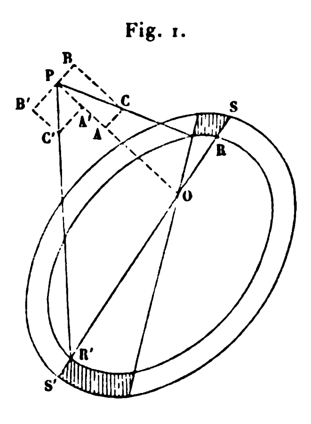
La suivante, extraite en grande partie d'un article publié par M. Percival Frost, d'après les inspirations de MM. Cayley et Adams (*Quarterly Journal of Mathematics,* t. XVII) et complétée par une démonstration de Chasles (*Comptes rendus,* t. VI, 1838), me paraît surpasser toutes les autres par son élégance et sa simplicité. Elle conduit sans effectuer aucune intégration aux quadratures qui expriment les composantes de l'attraction sur un point donné extérieur à l'ellipsoïde.

Attraction d'une couche infiniment mince. — Soit à calculer l'attraction exercée par une couche ellipsoïdale comprise entre les deux surfaces ellipsoïdales homothétiques et concentriques dont les axes sont, pour la première, a, b, c; pour la seconde, $a(1+\lambda)$, $b(1+\lambda)$, $c(1+\lambda)$. Soient $P(f, g, h)$ le point attiré, O un point situé à l'intérieur de la couche et dont les coordonnées sont f', g', h'. Imaginons un cône infiniment petit de sommet O et dont l'angle solide est ω. Ce cône découpe dans la couche deux éléments

de masse dont l'expression sera $\omega r^2 \delta r$ et $\omega r'^2 \delta r'$, en supposant la densité égale à l'unité et appelant r et r' les longueurs OR et OR′ des génératrices des deux cônes de sommet O.

On sait que les segments interceptés entre les deux couches sur une même

Fig. 1.



droite sont égaux; donc $\delta r = \delta r'$. L'attraction exercée par le premier élément sur le point P sera proportionnelle à $\frac{\omega r^2 \delta r}{\rho^2}$, celle exercée par le second sera proportionnelle à $\frac{\omega r'^2 \delta r'}{\rho'^2}$, en posant $\mathrm{PR} = \rho$, $\mathrm{PR}' = \rho'$. Soient PC et PC′ les valeurs de ces attractions; décomposons chacune d'elles en deux parties, l'une dirigée suivant PO, l'autre suivant une parallèle à RR′. Soient PA et PA′ les premières composantes, PB et PB′ les secondes; on aura

$$\mathrm{PA} = \frac{\omega r^3 \delta r}{\rho^3}\,\frac{\mathrm{PO}}{r}, \qquad \mathrm{PA}' = \frac{\omega r'^3 \delta r'}{\rho'^3}\,\frac{\mathrm{PO}}{r'};$$

$$\mathrm{PB} = \frac{\omega r^3 \delta r}{\rho^3}, \qquad \mathrm{PB}' = \frac{\omega r'^3 \delta r'}{\rho'^3}.$$

Le point O étant assujetti à la seule condition d'être placé à l'intérieur de la couche, cherchons à déterminer sa position de manière que la résultante des deux forces attractives PC et PC′ soit dirigée suivant PO, c'est-à-dire de telle sorte que l'on ait $\mathrm{PB} = \mathrm{PB}'$; ou bien, puisque $\delta r = \delta r'$, de telle façon que $\frac{r}{\rho} = \frac{r'}{\rho'}$.

Soient l, m, n les cosinus directeurs de OR, les coordonnées de R seront $f' + lr$, $g' + mr$, $h' + nr$; mais, le point R étant sur l'ellipsoïde a, b, c, on aura, cet ellipsoïde étant rapporté à ses axes principaux,

$$1 = \frac{(f' + lr)^2}{a^2} + \frac{(g' + mr)^2}{b^2} + \frac{(h' + nr)^2}{c^2}.$$

On a aussi

$$\rho^2 = (f - f' - lr)^2 + (g - g' - mr)^2 + (h - h' - nr)^2.$$

Multiplions la première équation par une indéterminée θ et ajoutons-les membre à membre,

$$\rho^2 + \theta = (f - f' - lr)^2 + (g - g' - mr)^2 + (h - h' - nr)^2 + \frac{(f' + lr)^2\theta}{a^2} + \frac{(g' + mr)^2\theta}{b^2} + \frac{(h' + nr)^2\theta}{c^2}.$$

Cherchons à profiter de l'indétermination des quatre quantités f', g', h', θ de façon que l'équation précédente se réduise à la forme

$$\rho^2 = r^2\left[1 + \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right)\theta\right].$$

Il suffit, pour cela, que l'on puisse déterminer f', g', h' et θ de façon que les équations de condition suivantes soient satisfaites simultanément :

$$\theta = (f - f')^2 + (g - g')^2 + (h - h')^2 + \left(\frac{f'^2}{a^2} + \frac{g'^2}{b^2} + \frac{h'^2}{c^2}\right)\theta,$$

$$\frac{f - f'}{\theta} = \frac{f'}{a^2}, \qquad \frac{g - g'}{\theta} = \frac{g'}{b^2}, \qquad \frac{h - h'}{\theta} = \frac{h'}{c^2}.$$

La dernière ligne peut être écrite

$$\frac{f - f'}{\theta} = \frac{f}{\theta + a^2}, \qquad \frac{g - g'}{\theta} = \frac{g}{\theta + b^2}, \qquad \frac{h - h'}{\theta} = \frac{h}{\theta + c^2}.$$

Substituons dans la première; il vient, toutes réductions faites,

$$(1) \qquad \frac{f^2}{a^2 + \theta} + \frac{g^2}{b^2 + \theta} + \frac{h^2}{c^2 + \theta} = 1.$$

Cette équation détermine θ, et, θ étant connu, les trois équations précédentes donnent f', g', h'.

On remarque que θ n'est autre chose que le paramètre définissant les trois surfaces du second degré homofocales à l'ellipsoïde (a, b, c) et passant par le point P.

Supposons $a < b < c$, l'équation (1) a une racine positive qui correspond à l'ellipsoïde homofocal et deux racines négatives. Nous prendrons la valeur positive de θ.

L'expression de $\frac{\rho}{r}$ ne dépend plus que des cosinus directeurs l, m, n, et, comme ces quantités n'y entrent que par leurs carrés, $\frac{\rho}{r}$ aura la même valeur que $\frac{\rho'}{r'}$.

On peut écrire la valeur de $\frac{\rho}{r}$ de la manière suivante :

$$(2) \qquad \frac{\rho^2}{r^2} = \frac{l^2}{\frac{a^2}{a^2+\theta}} + \frac{m^2}{\frac{b^2}{b^2+\theta}} + \frac{n^2}{\frac{c^2}{c^2+\theta}}.$$

D'après la forme de cette expression, on voit que $\frac{r}{\rho}$ ou $\frac{r'}{\rho'}$ peut être considéré géométriquement comme le rayon central d'un ellipsoïde dont les demi-axes principaux seraient $\frac{a}{\sqrt{a^2+\theta}}$, $\frac{b}{\sqrt{b^2+\theta}}$, $\frac{c}{\sqrt{c^2+\theta}}$.

Un calcul très simple donne

$$(3) \qquad \mathrm{OP} = \frac{\theta}{p}, \qquad \text{en posant} \qquad \frac{1}{p^2} = \frac{f^2}{(a^2+\theta)^2} + \frac{g^2}{(b^2+\theta)^2} + \frac{h^2}{(c^2+\theta)^2};$$

$$(4) \qquad \begin{cases} \cos(\mathrm{OP}, \mathrm{X}) = \dfrac{f-f'}{\mathrm{OP}} = \dfrac{fp}{a^2+\theta}, \\ \cos(\mathrm{OP}, \mathrm{Y}) = \dfrac{gp}{b^2+\theta}, \\ \cos(\mathrm{OP}, \mathrm{Z}) = \dfrac{hp}{c^2+\theta}; \end{cases}$$

$$(5) \qquad \frac{ff'}{a^2} + \frac{gg'}{b^2} + \frac{hh'}{c^2} = \frac{f^2}{a^2+\theta} + \frac{g^2}{b^2+\theta} + \frac{h^2}{c^2+\theta} = 1.$$

Les formules (4) montrent que PO est normale à l'ellipsoïde homofocal à (abc) passant par P et les formules (5) que le point O est situé dans le plan polaire de P relativement à l'ellipsoïde (abc).

Le point O étant ainsi déterminé, il nous reste à calculer la somme des attractions PA et PA′ dirigées suivant PO, et ensuite la somme de toutes les valeurs pareilles correspondant aux divers couples d'éléments que l'on obtient en faisant tourner autour de O le double cône infiniment petit, de façon à embrasser le volume tout entier de la couche ellipsoïdale.

On a

$$\mathrm{PA} + \mathrm{PA}' = \frac{\omega r^3\,\delta r}{\rho^3}\,\frac{\mathrm{OP}}{r} + \frac{\omega r'^3\,\delta r'}{\rho'^3}\,\frac{\mathrm{OP}}{r'} = \frac{\omega r^3 \theta}{\rho^3 p}\left(\frac{\delta r}{r} + \frac{\delta r'}{r'}\right) = \frac{\omega r^3 \theta}{\rho^3 p}\,\delta\,\mathrm{L}(rr');$$

r et r' sont les racines de l'équation du second degré

$$\frac{(f'+lr)^2}{a^2}+\frac{(g'+mr)^2}{b^2}+\frac{(h'+nr)^2}{c^2}=1;$$

on a, par suite,

$$rr'=\frac{1-\frac{f'^2}{a^2}-\frac{g'^2}{b^2}-\frac{h'^2}{c^2}}{\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}}.$$

Le point (f', g', h') étant à l'intérieur de l'ellipsoïde (a, b, c), le second membre est positif et représente la valeur numérique du produit.

Désignons par δa, δb, δc les variations des demi-axes de l'ellipsoïde lorsqu'on passe de la surface interne à la surface externe, nous aurons

$$\delta a=\lambda a,\qquad \delta b=\lambda b,\qquad \delta c=\lambda c.$$

Remarquons que, si A, B, C sont trois quantités ne dépendant pas de a, b, c, on a

$$\delta\left(\frac{A}{a^2}+\frac{B}{b^2}+\frac{C}{c^2}\right)=-2\lambda\left(\frac{A}{a^2}+\frac{B}{b^2}+\frac{C}{c^2}\right).$$

Un calcul simple donne immédiatement

$$\delta\,L(rr')=\frac{2\lambda}{\frac{\theta f^2}{(\theta+a^2)^2}+\frac{\theta g^2}{(\theta+b^2)^2}+\frac{\theta h^2}{(\theta+c^2)^2}}=\frac{2\lambda p^2}{\theta}.$$

L'expression de la force attractive sera donc, suivant PO,

$$2\lambda p\,\omega R^3,\qquad \text{en posant}\quad \frac{r}{\rho}=\frac{r'}{\rho'}=R.$$

Les composantes, suivant les axes de l'ellipsoïde, seront

Suivant OX...... $2\lambda p\omega R^3\cos(OP, X)=\frac{\lambda p^2 f}{\theta+a^2}2\omega R^3$

Suivant OY...... $2\lambda p\omega R^3\cos(OP, Y)=\frac{\lambda p^2 g}{\theta+b^2}2\omega R^3$

Suivant OZ...... $2\lambda p\omega R^3\cos(OP, Z)=\frac{\lambda p^2 h}{\theta+c^2}2\omega R^3$

Ces valeurs des composantes de la force attractive élémentaire ont été trouvées par Chasles, sous cette forme, par une méthode purement géométrique, mais un peu plus compliquée que la précédente.

Le point O ayant été déterminé, si l'on fait tourner le double cône ayant pour sommet ce point de façon à comprendre toute la couche ellipsoïdale, les attractions correspondant à chaque couple d'éléments seront toutes dirigées suivant PO; les composantes de toutes ces attractions suivant les axes seront

$$\text{Suivant OX} \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\lambda p^2 f}{\theta + a^2} \Sigma 2\omega R^3$$

$$\text{Suivant OY} \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\lambda p^2 g}{\theta + b^2} \Sigma 2\omega R^3$$

$$\text{Suivant OZ} \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\lambda p^2 h}{\theta + c^2} \Sigma 2\omega R^3$$

le signe Σ s'étendant à toute la masse de la couche. Il est aisé d'évaluer cette somme, en se rappelant que R représente le rayon vecteur central d'un ellipsoïde dont les demi-axes sont $\frac{a}{\sqrt{a^2+\theta}}$, $\frac{b}{\sqrt{b^2+\theta}}$, $\frac{c}{\sqrt{c^2+\theta}}$, d'après l'équation (2).

Le volume d'un pareil ellipsoïde est égal, d'une part, à

$$\tfrac{2}{3} \Sigma \omega R^3$$

et, d'autre part, à

$$\frac{4}{3}\pi \frac{abc}{\sqrt{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)}};$$

d'où l'on tire

$$2\Sigma\omega R^3 = \frac{4\pi abc}{\sqrt{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)}}.$$

Les composantes de l'attraction de la couche ellipsoïdale sur le point extérieur P seront donc, en posant, pour abréger l'écriture, $\theta + a^2 = a_1^2$, $\theta + b^2 = b_1^2$, $\theta + c^2 = c_1^2$,

$$\text{Suivant OX} \ldots\ldots \quad \frac{\lambda p^2 f}{a_1^2} \frac{4\pi abc}{a_1 b_1 c_1} \quad \text{ou} \quad 4\pi \frac{\lambda a}{a} \frac{abc}{a_1 b_1 c_1} \frac{p^2 f}{a_1^2}$$

$$\text{Suivant OY} \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{ou} \quad 4\pi \frac{\lambda b}{b} \frac{abc}{a_1 b_1 c_1} \frac{p^2 g}{b_1^2}$$

$$\text{Suivant OZ} \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{ou} \quad 4\pi \frac{\lambda c}{c} \frac{abc}{a_1 b_1 c_1} \frac{p^2 h}{c_1^2}$$

Attraction sur un point extérieur d'un ellipsoïde homogène. — Soit $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$ l'équation d'un ellipsoïde homogène; soit $P(f, g, h)$ le point attiré extérieur à l'ellipsoïde. Conservons d'ailleurs les notations

déjà adoptées. On partagera l'ellipsoïde proposé en couches infiniment minces limitées par des surfaces semblables à celle de l'ellipsoïde. Soient (a, b, c), $a(1+\lambda)$, $b(1+\lambda)$, $c(1+\lambda)$ les demi-axes de deux surfaces infiniment voisines qui limitent une couche, a_1, b_1, c_1 les demi-axes d'un ellipsoïde homofocal à a, b, c passant par P. La valeur de l'attraction exercée par cette couche sur P et estimée suivant OX sera, d'après ce qui précède,

$$4\pi \frac{\lambda a}{a} \frac{abc}{a_1 b_1 c_1} \frac{p^2 f}{a_1^2}.$$

Soient $\lambda a = da$ et X la valeur totale de l'attraction de l'ellipsoïde suivant OX, on aura

$$X = 4\pi \int \frac{da}{a} \frac{abc}{a_1 b_1 c_1} \frac{p^2 f}{a_1^2}.$$

Deux formules pareilles donneront les composantes suivant OY et suivant OZ. Occupons-nous seulement de X; on obtiendra ensuite Y et Z par des permutations circulaires.

On voit bien aisément qu'il n'y a sous le signe $\int$ qu'une seule variable a, par exemple, car les autres quantités peuvent toutes s'exprimer en fonction de a. On a, en effet,

$$b = a\frac{B}{A}, \qquad c = a\frac{C}{A},$$

$$b_1^2 - a_1^2 = b^2 - a^2 = a^2\left(\frac{B^2}{A^2} - 1\right), \qquad c_1^2 - a_1^2 = c^2 - a^2 = a^2\left(\frac{C^2}{A^2} - 1\right),$$

(6) $$b_1^2 = a_1^2 + a^2\left(\frac{B^2}{A^2} - 1\right), \qquad c_1^2 = a_1^2 + a^2\left(\frac{C^2}{A^2} - 1\right),$$

et a_1 est déterminé par l'équation

(7) $$\frac{f^2}{a_1^2} + \frac{g^2}{a_1^2 + a^2\left(\frac{B^2}{A^2} - 1\right)} + \frac{h^2}{a_1^2 + a^2\left(\frac{C^2}{A^2} - 1\right)} = 1.$$

On a ainsi le moyen d'exprimer b, c, a_1, b_1, c_1 en fonction de a. On a, de plus,

(8) $$\frac{1}{p^2} = \frac{f^2}{a_1^4} + \frac{g^2}{b_1^4} + \frac{h^2}{c_1^4}.$$

Prenons maintenant une nouvelle variable u définie par la relation $\frac{a}{a_1} = u$.

Introduisons cette variable dans les équations (7) et (8), on a

$$f^2u^2 + \frac{g^2}{\frac{1}{u^2} + \frac{B^2}{A^2} - 1} + \frac{h^2}{\frac{1}{u^2} + \frac{C^2}{A^2} - 1} = a^2,$$

$$\frac{a^4}{p^2} = f^2u^4 + \frac{g^2}{\left(\frac{1}{u^2} + \frac{B^2}{A^2} - 1\right)^2} + \frac{h^2}{\left(\frac{1}{u^2} + \frac{C^2}{A^2} - 1\right)^2};$$

différentions la première, il vient, en tenant compte de la seconde,

$$da = \frac{a^3\,du}{p^2u^3}.$$

Limites de l'intégrale. — La variable a varie de o à A. La variable u varie de o à $\frac{A}{A_1}$, A_1 étant ce que devient a_1 lorsque $a = A$, c'est-à-dire que A_1 est une racine de l'équation

$$\frac{f^2}{A_1^2} + \frac{g^2}{A_1^2 + B^2 - A^2} + \frac{h^2}{A_1^2 + C^2 - A^2} = 1.$$

Effectuons les substitutions, on trouve sans peine, toutes réductions faites,

$$X = 4\pi BCf \int_0^{\frac{A}{A_1}} \frac{u^2\,du}{\sqrt{A^2 + u^2(B^2 - A^2)}\sqrt{A^2 + u^2(C^2 - A^2)}}.$$

Nous n'écrivons pas les valeurs des composantes Y et Z qu'on obtient par de simples permutations de lettres.

Dans les formules précédentes, on a supposé que l'ellipsoïde était homogène. Le cas où il serait composé de couches homogènes de densité variable d'une couche à l'autre ne présente aucune difficulté. Les valeurs des composantes de l'attraction totale sur un point extérieur sont pareilles aux précédentes; il suffit d'introduire, sous le signe $\int$, un facteur δ qui représente la densité et qui est une fonction donnée de u.

Premier cas particulier. — Le point attiré est situé sur la surface externe de l'ellipsoïde; on a

$$A = A_1 \quad \text{et} \quad X = 4\pi BCf \int_0^1 \frac{u^2\,du}{\sqrt{A^2 + u^2(B^2 - A^2)}\sqrt{A^2 + u^2(C^2 - A^2)}}.$$

Second cas particulier. — L'ellipsoïde est de révolution : on a, par exemple, B = C; l'intégration s'effectue immédiatement.

SUR

CERTAINS GROUPES FUCHSIENS

ET SUR

UNE EXTENSION DE LA THÉORIE DES FORMES QUADRATIQUES;

PAR M. X. STOUFF.

Ce travail a pour objet l'étude d'une classe très étendue de groupes fuchsiens. La formation de ces groupes dépend de certains entiers fixes appelés *modules,* qui forment un ou plusieurs systèmes distincts. Voici d'abord la théorie des groupes à un seul *système de modules*.

I.

Tout système de modules se compose de nombres premiers entre eux, deux à deux, $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Soit L leur produit; soient P_i un produit de modules où chacun d'eux n'entre pas plus d'une fois comme facteur, et P'_i le produit des autres modules. Toutes les substitutions représentées par la formule

$$(1) \qquad \left(z, \frac{\alpha P_i z + L\beta}{\gamma z + \delta P_i}\right),$$

où

$$(1') \qquad P_i \alpha\delta - P'_i \beta\gamma = 1,$$

forment un groupe. En effet, le produit d'une de ces substitutions par une autre est

$$\left[z, \frac{(\alpha\alpha' P_i P_j + \gamma\beta' L) z + (\beta\alpha' P_j + \delta\beta' P_i) L}{(\alpha\gamma' P_i + \gamma\delta' P_j) z + (\beta\gamma' L + \delta\delta' P_i P_j)}\right].$$

Soit P_h le produit des modules communs à P_i et à P_j, et $P_k = \frac{P_i P_j}{P_h^2}$. Le déterminant de la substitution précédente est $P_i P_j$; mais le premier, le troisième, le quatrième coefficient et le quotient du second coefficient par

L sont divisibles par P_k. En effectuant cette division, il vient

$$\left[z, \frac{(\alpha\alpha' P_h P_k + \gamma\beta' P'_h)z + \left(\beta\alpha'\frac{P_j}{P_h} + \delta\beta'\frac{P_i}{P_h}\right)L}{\left(\alpha\gamma'\frac{P_i}{P_h} + \gamma\delta'\frac{P_j}{P_h}\right)z + (\beta\gamma' P'_h + \delta\delta' P_k P_h)}\right];$$

dans cette substitution, le déterminant est P_k. Je remarque que le premier et le quatrième coefficient sont divisibles par P_k : en effet, en divisant $P_i P_j$ par P_h^2, on fait disparaître les modules qui divisent P_k. Par suite, P_k et P_h sont premiers entre eux. Donc P_k divise P'_h. La substitution prend alors la forme

$$\left(z, \frac{AP_k z + BL}{\Gamma z + \Delta P_k}\right),$$

où

$$P_k A\Delta - P'_k B\Gamma = 1;$$

elle rentre donc dans la formule (1).

Soient H et G deux groupes ainsi définis. Pour que H contienne G, il faut et il suffit que chacun des modules de G soit un produit des modules de H, chacun de ces derniers n'entrant qu'une fois comme facteur, et que le produit des modules de G soit divisible par le produit des modules de H. Cette dernière condition, combinée avec la première, entraîne l'égalité des deux produits. Désignons par

$$\left(z, \frac{\alpha P_i z + \beta L}{\gamma z + \delta P_i}\right) \quad \text{et} \quad \left(z, \frac{\lambda Q_j z + \mu L}{\nu z + \rho Q_j}\right)$$

deux substitutions quelconques, l'une de H, l'autre de G. La transformée de la seconde par la première est, après quelques simplifications,

$$(2)\quad \left\{z, \frac{(\alpha\gamma\mu Q'_j - \alpha\delta\lambda P_i + \beta\gamma\rho P'_i - \beta\delta\nu Q'_j)Q_j z - [\alpha^2\mu P_i - \alpha\beta(\lambda-\rho)Q_j - \beta^2\nu P'_i]L}{[\gamma^2\mu P'_i - \gamma\delta(\lambda-\rho)Q_j - \delta^2\nu P_i]z - (\alpha\gamma\mu Q'_j - \beta\gamma\lambda P'_i + \alpha\beta\rho P_i - \beta\delta\nu Q'_j)Q_j}\right\};$$

elle appartient encore au groupe G. Donc G *est sous-groupe distingué de* H.

Ainsi le groupe défini par le système de modules 2, 3, 5 a pour sous-groupes distingués les groupes à modules 2, 15; 6, 5; 3, 10; 1, 30.

II.

Lorsqu'un des groupes est donné par ses modules, on peut se proposer de déterminer un système de substitutions fondamentales du groupe. Quand

les modules sont des nombres premiers absolus, on démontre aisément que les substitutions génératrices sont en nombre fini.

Supposons que ce cas se présente. Je prouverai que dans les substitutions

$$(z,\ z+\mathrm{L}) \tag{3}$$

et

$$\left(z,\ \mathrm{P}_i \mathrm{R}_{ik} - \frac{\mathrm{P}_i}{z+\mathrm{P}_i\mathrm{R}'_{ik}}\right), \tag{4}$$

dans lesquelles P_i représente tous les produits de modules où chacun d'eux n'entre qu'une fois, R_{ik} prend toutes les valeurs inférieures à P'_i et premières à ce nombre, et R'_{ik} est un nombre choisi, de telle sorte que

$$\mathrm{P}_i \mathrm{R}_{ik} \mathrm{R}'_{ik} \equiv 1 \bmod \mathrm{P}'_i$$

forment un système fondamental. Il est toujours possible de faire correspondre à chaque nombre R_{ik} un nombre R'_{ik} de manière à satisfaire à cette dernière congruence. Le nombre des substitutions ainsi obtenues est évidemment limité.

En effet, imaginons une substitution quelconque du groupe

$$\left(z,\ \frac{\alpha \mathrm{Q}_j z + \beta \mathrm{L}}{\gamma z + \delta \mathrm{Q}_j}\right), \tag{5}$$

soit

$$\alpha = \gamma q + \gamma', \qquad \beta \mathrm{Q}'_j = \delta q + \delta',$$

où γ' est moindre que γ en valeur absolue. L'emploi de la substitution $(z,\ z+\mathrm{L})$ permet de retrancher de la fraction (5) des multiples de L et, par suite, de ramener q à être compris entre o et Q'_j.

Posons

$$q \mathrm{Q}_j = \mathrm{R}_{ik} \mathrm{P}_i, \tag{6}$$

$$\frac{\gamma' \mathrm{Q}_j z + \delta' \mathrm{Q}_j}{\gamma z + \delta \mathrm{Q}_j} = -\frac{\mathrm{P}'_i}{z_1 + \mathrm{R}'_{ik} \mathrm{P}_i}; \tag{7}$$

je me propose de déterminer une substitution (4), de telle sorte que les égalités (6) et (7) soient réalisées. Distinguons deux cas :

1° q est premier avec Q'_j; on pourra alors prendre

$$\mathrm{P}_i = \mathrm{Q}_j, \qquad \mathrm{R}_{ik} = q;$$

z_1 s'exprime alors en z par une fraction dans laquelle, après simplification,

le coefficient de z au dénominateur est γ' et, par conséquent, moindre en valeur absolue que γ.

2° q n'est pas premier avec Q'_j; tous les modules étant premiers et Q'_j ne les contenant pas plus d'une fois, le diviseur D commun à q et à Q'_j est un produit de modules pris chacun une fois au plus, soit $P_i = DQ_j$ et $q = q_1 D$; $P'_i = \frac{Q'_j}{D}$ ne contient plus de facteurs premiers divisant q_1 et est, par suite, premier avec q_1. On pourra donc poser $R_{ik} = q_1$. La substitution se trouve alors ramenée, comme dans le cas précédent, à une substitution où le coefficient de z au dénominateur est γ'. En continuant ainsi, on pourra réduire à o le coefficient de z au dénominateur; mais si, dans l'égalité

$$\alpha\delta Q_j - \beta\gamma Q'_j = 1,$$

on a $\gamma = 0$, il en résulte $\alpha = \delta = \pm 1$. La substitution prend la forme $(z, z + \beta L)$, et l'on peut évidemment la réduire à la substitution identique à l'aide de $(z, z + L)$.

Les substitutions (4), quoique suffisantes pour engendrer tout le groupe, ne sont pas, en général, toutes nécessaires. Il est facile de voir d'abord qu'elles se ramènent, deux à deux, l'une à l'autre. Soient

$$z_1 = P_i R_{ik} - \frac{P_i}{z + P_i R'_{ik}}, \qquad z = -P_i R'_{ik} - \frac{P_i}{z_1 - P_i R_{ik}};$$

nous pouvons supposer R'_{ik} compris entre o et P'_i; écrivons la dernière équation sous la forme

$$z + L = P_i(P'_i - R'_{ik}) - \frac{P_i}{z - L + P_i(P'_i - R_{ik})};$$

$P'_i - R'_{ik}$ est compris entre o et P'_i. Les deux substitutions caractérisées par R_{ik} et $P'_i - R'_{ik}$ se ramènent donc l'une à l'autre. On peut encore pousser la réduction plus loin. Je prendrai pour exemple le groupe défini par les modules 2, 3, 5. D'après la remarque précédente, il suffit de donner à $P_i R_{ik}$ les valeurs

$$P_i R_{ik} = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 18, 21, 25.$$

Je dis maintenant que les substitutions

$$(8) \quad (z, z+30), \quad \left(z, -\frac{30}{z}\right), \quad \left(z, 8 - \frac{2}{z+4}\right), \quad \left(z, 10 - \frac{10}{z+10}\right), \quad \left(z, 15 - \frac{15}{z+15}\right)$$

forment un système fondamental. Les inverses des trois dernières sont

$$(9)\qquad \left(z,\ -4-\frac{2}{z-8}\right),\qquad \left(z,\ -10-\frac{10}{z-10}\right),\qquad \left(z,\ -15-\frac{15}{z-15}\right).$$

Je m'appuie sur la remarque suivante : soit une fraction linéaire

$$\frac{mz+n}{pz+q},\qquad \frac{m}{p}=A+\cfrac{a}{B+\cfrac{b}{C+r}};$$

on a aussi

$$\frac{mz+n}{pz+q}=A+\cfrac{a}{B+\cfrac{b}{C+r+\cfrac{s}{z+t}}}.$$

Or on voit aisément que toute substitution de notre groupe, où

$$(10)\qquad \frac{m}{p}=0,\ 8,\ 10,\ 15,\ -4,\ -10,\ -15,$$

est une combinaison simple de $(z, z+30)$ avec une des autres substitutions (8) et (9). Il ne reste plus qu'à montrer que les valeurs trouvées pour $P_i R_{ik}$ (en exceptant 8, 10 et 15) peuvent se développer suivant des fractions continues formées en combinant les substitutions (8) et (9), et en donnant à z, dans la substitution extrême, les valeurs (10). On trouve

$$1=-\frac{30}{-30+0},\qquad 2=-\frac{30}{-30+15},\qquad 3=-\frac{30}{-10},$$

$$4=-\cfrac{30}{-10-\cfrac{10}{-10-\cfrac{30}{-10-\cfrac{10}{-10+8}}}},\qquad 5=-\cfrac{30}{-4-\cfrac{2}{-8+10-\cfrac{10}{10+0}}}.$$

$$6=-\cfrac{30}{-10-\cfrac{10}{-10+8}},\qquad 7=8-\cfrac{2}{4-\cfrac{30}{15}},\qquad 11=10-\frac{10}{10-30+10},$$

$$12=10-\frac{10}{10-30+15},\qquad 13=15-\cfrac{15}{10-\cfrac{10}{10-4-\cfrac{2}{-8+10-\cfrac{10}{10+0}}}}$$

et

$$16 = 30 - 15 - \frac{15}{-15+0}, \qquad 18 = 30 - 15 - \frac{15}{-15+10},$$

$$21 = 30 - 10 - \frac{10}{-10+0}, \qquad 25 = 30 - 10 - \frac{10}{-10+8}.$$

On peut prendre pour polygone générateur du groupe un polygone $i\infty$ABCDEFGH$i\infty$. Les côtés A$i\infty$ et H$i\infty$ sont conjugués par $(z, z+30)$, AB et HG par $\left(z, 15 - \frac{15}{z+15}\right)$, BC et GF par $\left(z, 10 - \frac{10}{z+10}\right)$, CD et FE par $\left(z, 8 - \frac{2}{z+4}\right)$; chaque moitié du côté DE est conjuguée avec l'autre par la substitution $\left(z, -\frac{30}{z}\right)$. A et H, B et G, C et F, D et E forment respectivement des cycles d'angle π.

Les groupes dans lesquels tous les modules ne sont pas premiers présentent des circonstances analogues. Par exemple, le groupe défini par le module unique 8 admet pour système fondamental

$$(z, z+8), \qquad \left(z, 3 - \frac{1}{z+3}\right), \qquad \left(z, -\frac{8}{z}\right).$$

On peut prendre pour polygone générateur un pentagone $i\infty$ABCD$i\infty$, dans lequel A$i\infty$ et D$i\infty$ sont conjugués par $(z, z+8)$, AB et DC par $\left(z, 3 - \frac{1}{z+3}\right)$, et les deux moitiés de BC par $\left(z, -\frac{8}{z}\right)$. A et D forment un cycle parabolique, B et C un cycle d'angle π.

Les groupes les plus simples sont les groupes aux modules uniques 2 et 3; ils sont engendrés respectivement par

$$(z, z+2), \qquad \left(z, -\frac{2}{z}\right), \qquad (z, z+3), \qquad \left(z, -\frac{3}{z}\right).$$

Les équations fuchsiennes correspondantes ont chacune trois points singuliers; les différences des racines des équations déterminantes sont $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$; $0, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}$.

III.

On peut se proposer de déterminer, *a priori*, les points singuliers que présentent les équations fuchsiennes engendrées par les groupes à déterminants limités. Cherchons d'abord de quelles périodes est susceptible une substitution linéaire $\left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$ à coefficients entiers. En désignant par n

la période de cette substitution, on a

$$\frac{\alpha+\delta}{\sqrt{\alpha\delta-\beta\gamma}} = 2\cos\frac{\pi}{n}.$$

Il faut donc que $\cos\frac{\pi}{n}$ ne contienne en facteur pas d'autres irrationnelles qu'un radical carré. On en déduit que n peut seulement prendre les valeurs 2, 3, 4, 6.

La recherche des points singuliers eux-mêmes se rattache à une extension de la théorie des formes quadratiques. Étant donné un groupe défini par ses modules, je considère une expression de la forme

$$(11)\qquad ax^2 + bP_i xy + cLy^2 \qquad (a, b, c),$$

où a, b, c sont des entiers, tels que a, c et bP_i n'aient pas de facteurs communs, et où x et y sont respectivement de la forme $x_0\sqrt{Q_j}$ et $\frac{y_0}{\sqrt{Q_j}}$, x_0 et y_0 étant entiers. Si tous les modules sont premiers, on supposera b premier avec P'_i, ce qui ne diminue pas la généralité. Dans le cas contraire, P_i désignera le plus grand produit de modules qui divise le coefficient de xy; j'appelle ϖ le plus grand commun diviseur de b et de P'_i. Je nomme les expressions (11) *formes quadratiques attachées au groupe* donné.

L'expression générale d'une substitution de ce groupe étant

$$\left(z, \frac{\alpha Q_j z + \beta L}{\gamma z + \delta Q_j}\right),$$

j'envisage la substitution à deux variables

$$(12)\qquad \left|\begin{array}{l} x, \dfrac{\alpha Q_j x + \beta L y}{\sqrt{Q_j}} \\ y, \dfrac{\gamma x + \delta Q_j y}{\sqrt{Q_j}} \end{array}\right|;$$

si x et y sont de la forme $x_0\sqrt{Q_j}$ et $\frac{y_0}{\sqrt{Q_j}}$, cette substitution change ces quantités en des quantités de la même forme. L'expression (11) devient

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l} (a\alpha^2 Q_j + b\alpha\gamma P_i + c\gamma^2 Q'_j)x^2 + (2a\alpha\beta P'_i + b\alpha\delta Q_j + b\beta\gamma Q'_j + 2c\gamma\delta P'_i)P_i xy \\ \quad + (a\beta^2 Q'_j + b\beta\delta P_i + c\delta^2 Q_j)Ly^2; \end{array}\right.$$

elle reste donc attachée au même groupe. Nous dirons que les formes (11)

et (13) sont *équivalentes*. Dans (13), le plus grand commun diviseur entre le multiplicateur de $P_i xy$ et P'_i est encore ϖ.

Le déterminant de la substitution (12) étant égal à 1, les formes (11) et (13) ont un même discriminant, qu'on peut représenter par DP_i, D étant entier, et l'on a

$$b^2 P_i - 4ac P'_i = D. \tag{14}$$

On nommera *classe*, comme dans la théorie ordinaire, l'ensemble des formes équivalentes à une forme donnée. D, ϖ et P_i sont les mêmes pour toutes les formes d'une même classe.

Le premier problème qui s'offre à l'esprit est de représenter un nombre entier donné m par une forme donnée

$$m = aQ_j x_0^2 + bP_i x_0 y_0 + cQ'_j y_0^2. \tag{15}$$

On est conduit immédiatement à limiter les conditions du problème; car on peut supposer, sans diminuer la généralité :

1° x_0 et y_0 premiers entre eux. S'ils avaient pour plus grand commun diviseur un nombre δ, on serait ramené au même problème, le nombre à représenter étant $\frac{m}{\delta^2}$ et x_0, y_0 étant premiers entre eux;

2° x_0 premier avec Q'_j et y_0 avec Q_j. En effet, si δ était le diviseur commun à x_0 et à Q'_j, en enlevant aux modules de Q'_j les facteurs premiers qui entrent dans δ, on serait ramené à représenter $\frac{m}{\delta}$ par une forme attachée à un groupe plus simple;

3° m premier avec P_i pour une raison analogue.

Nous pourrons alors déterminer deux nombres ξ_0 et η_0, tels que

$$x_0 \eta_0 Q_j - y_0 \xi_0 Q'_j = 1, \tag{16}$$

et la substitution

$$\left| \begin{array}{ll} u, & \dfrac{u x_0 Q_j + v \xi_0 L}{\sqrt{Q_j}} \\ v, & \dfrac{u x_0 + v \eta_0 Q_j}{\sqrt{Q_j}} \end{array} \right|$$

change la forme donnée en la forme

$$mu^2 + nP_i uv + lLv^2 \qquad (m, n, l); \tag{17}$$

comme le discriminant est resté invariable, on a

$$n^2 P_i - 4mlP'_i = D;$$

m étant donné, il faut donc que la congruence

(18) $$n^2 P_i \equiv D \pmod{4mP'_i}$$

soit possible. Une courte discussion donne les résultats suivants :

1° Si P_i est impair, il faut que DP_i soit reste quadratique de $4mP'_i$.

2° P_i est simplement pair, alors D est pair; il faut que $\frac{DP_i}{4}$ soit reste quadratique de $2mP'_i$.

3° P_i est doublement pair, il faut que $\frac{DP_i}{16}$ soit reste quadratique de mP'_i.

Toutes les solutions de l'équation (16) correspondent à des racines de la congruence (18) congrues (mod. $2mP'_i$).

Pour résoudre le problème proposé, on formera d'abord un système de solutions de la congruence (18) incongrues (mod. $2mP'_i$). A chacune de ces solutions correspond une forme (m, n, l). Nous aurons à voir, comme dans la théorie ordinaire :

1° Si la forme (m, n, l) est équivalente à (a, b, c);

2° A trouver toutes les substitutions qui transforment (a, b, c) dans (m, n, l).

Ces dernières substitutions peuvent se ramener à une substitution unique transformant (a, b, c) dans (m, n, l) et aux substitutions qui transforment (a, b, c) en elle-même. Je me propose de trouver celles-ci tout d'abord.

Pour que la substitution (12) transforme (a, b, c) en elle-même, il faut et il suffit que l'on ait

(19) $$\left\{\begin{aligned} a &= a\alpha^2 Q_j + b\alpha\gamma P_i + c\gamma^2 Q'_j, \\ b &= 2a\alpha\beta P'_i + b(\alpha\delta Q_j + \beta\gamma Q'_j) + 2c\gamma\delta P'_i; \end{aligned}\right.$$

on en déduit

$$\frac{\delta - \alpha}{bQ'_j} = \frac{\beta}{-cP'_i} = \frac{\gamma}{aP'_i};$$

θ_j étant le plus grand diviseur commun aux trois dénominateurs, on aura

(20) $$\delta - \alpha = \frac{bQ'_j}{\theta_j}u, \qquad \beta = \frac{-cP'_i}{\theta_j}u, \qquad \gamma = \frac{aP'_i}{\theta_j}u,$$

u étant entier.

Étudions la formation du nombre θ_j. Le facteur ϖ est évidemment commun aux trois nombres bQ'_j, $-cP'_i$, aP'_i. Soit $b = b_1\varpi$. Il reste à trouver le facteur commun à $b_1 Q'_j$, $-c\frac{P'_i}{\varpi}$, $a\frac{P'_i}{\varpi}$. Si un diviseur quelconque commun aux trois nombres divisait b_1, comme b_1 est premier avec $\frac{P'_i}{\varpi}$, il devrait diviser a et c, ce qui est contre l'hypothèse. Donc le facteur commun divise Q'_j. Soit $d'd''$ ce facteur, dans lequel je suppose que d'' divise $\frac{P'_i}{\varpi}$ et que d' est premier avec $\frac{P'_i}{\varpi d''}$; d' devrait diviser a et c, d'ailleurs il divise ϖP_i; a, bP_i et c auraient donc un facteur commun, ce qui est contre l'hypothèse. Donc $\frac{\theta_j}{\varpi}$ est le plus grand commun diviseur entre Q'_j et $\frac{P'_i}{\varpi}$; par suite, θ_j le plus grand commun diviseur entre $\varpi Q'_j$ et P'_i.

En posant

$$\alpha + \delta = t,$$

on trouve ensuite que t et u doivent vérifier l'équation

$$t^2 Q_j - \frac{DQ'_j P'_i u^2}{\theta_j^2} = 4, \tag{21}$$

et l'on a

$$\alpha = \frac{t\theta_j - bQ'_j u}{2\theta_j}, \qquad \beta = -\frac{cP'_i u}{\theta_j}, \qquad \gamma = \frac{aP'_i u}{\theta_j}, \qquad \delta = \frac{t\theta_j + bQ'_j u}{2\theta_j}, \tag{22}$$

Réciproquement, si l'on a une solution en nombres entiers de l'équation (21), les valeurs de α, β, γ, δ, calculées par les formules (22), vérifient identiquement l'équation (19) et la relation $\alpha\delta Q_j - \beta\gamma Q'_j = 1$. Pour qu'elles soient entières, il suffit que α et δ ne contiennent pas 2 au dénominateur; or $2\alpha + 2\delta$ ou $2t$ est pair; donc 2α et 2δ sont de même parité. D'ailleurs on a la relation

$$4\alpha\delta Q_j = 4\left(1 - \frac{acP'^2_i Q'_j}{\theta_j^2} u^2\right).$$

Si Q_j n'est pas divisible par 4, $4\alpha\delta$ est pair et 2α, 2δ sont pairs; si Q_j est divisible par 4, on ne peut arriver à la même conclusion, mais on remarque que la parité de α et de δ pour une solution donnée de l'équation (21) forme un caractère constant de toutes les formes équivalentes; si D est

négatif et égal à $-\Delta$, l'équation (21) prend la forme

$$t^2 Q_j + \frac{\Delta Q'_j P'_i u^2}{\theta^2} = 4 \tag{23}$$

et n'admet qu'un nombre limité de solutions.

IV.

Dans l'étude des formes attachées à un groupe, la notion des réduites paraît beaucoup plus complexe que dans la théorie ordinaire. On démontre cependant sans difficulté que le nombre des classes de formes pour lesquelles D, ϖ et P_i sont donnés est limité.

Je commence par quelques considérations sur les substitutions linéaires. Les substitutions

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta L \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}, \tag{A}$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma L = 1 \tag{A'}$$

forment un sous-groupe bien connu du groupe des substitutions

$$\begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ \nu, & \rho \end{pmatrix}, \tag{B}$$

$$\lambda\rho - \mu\nu = 1. \tag{B'}$$

Étant donnée une quelconque de ces dernières, je me propose de déterminer une substitution (A), telle que le produit de la première par la seconde

$$\begin{pmatrix} \lambda\alpha + \mu\gamma, & \lambda\beta L + \mu\delta \\ \nu\alpha + \rho\gamma, & \nu\beta L + \rho\delta \end{pmatrix} \tag{C}$$

appartienne à un système fini que j'appellerai *système de représentants* du groupe (B) dans le groupe (A).

Je distinguerai deux cas principaux :

1° μ et L sont premiers entre eux. En vertu de (B'), λ est également premier avec μ. Nous pourrons donc trouver des valeurs de β et δ, telles que

$$\lambda\beta L + \mu\delta = -1;$$

on aura

$$\delta = \delta_0 + s\lambda L, \qquad \beta = \beta_0 - s\mu,$$

s étant entier. On en déduit

$$\nu\beta L + \rho\delta = \nu\beta_0 L + \rho\delta_0 + sL;$$

on peut déterminer s de sorte que cette quantité soit comprise entre o et L. Nous prendrons ensuite

$$\alpha = -\mu, \qquad \gamma = \rho.$$

La substitution (C) prend alors la forme

$$\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & r \end{pmatrix},$$

r étant un nombre quelconque compris entre o et L.

2° μ et L ont un plus grand commun diviseur d. On posera

(D) $$\lambda\beta L + \mu\delta = -d,$$

$$\delta = \delta_0 + s\frac{\lambda L}{d}, \qquad \beta = \beta_0 - \frac{s\mu}{d}, \qquad \nu\beta L + \rho\delta = \nu\beta_0 L + \rho\delta_0 + s\frac{L}{d}.$$

Supposons d'abord d premier avec $\frac{L}{d}$; on peut satisfaire à la congruence

$$\nu\beta_0 L + \rho\delta_0 + s\frac{L}{d} \equiv 1 \qquad (\text{mod}\, d),$$

$$s = s_0 + s'd, \qquad \nu\beta L + \rho\delta = \nu\beta_0 L + \rho\delta_0 + s_0\frac{L}{d} + s'L.$$

On pourra déterminer s', de sorte que ce nombre soit compris entre o et L. Nous poserons ensuite

$$\alpha = -\mu t + u\rho, \qquad \gamma = \lambda t - u\nu,$$

on aura

$$\alpha\delta - \beta\gamma L = u(\nu\beta L + \rho\delta) - td = 1.$$

Pour y satisfaire, on réduira la fraction irréductible $\frac{\nu\beta L + \rho\delta}{d}$ en fraction continue, et l'on prendra pour $\frac{t}{u}$ l'avant-dernière réduite; (C) prendra la forme

$$\begin{pmatrix} u, & -d \\ t, & r \end{pmatrix},$$

r étant compris entre o et L, congru à 1 (mod d). A chaque valeur de r est attaché un système t, u.

Supposons que d et $\frac{L}{d}$ aient un plus grand commun diviseur d'. En vertu de (B'), ρ est premier avec μ et, par suite, avec d'; en vertu de (D), δ est premier avec $\frac{L}{d}$ et, par suite, avec d'. Donc $\nu\beta L + \rho\delta$ est toujours premier avec d'.

Pour que $\nu\beta L + \rho\delta$ soit premier avec d, il faut et il suffit que ce nombre ne contienne aucun des facteurs premiers de $\frac{d}{d'}$ qui n'entrent pas dans d'; soit d'' le produit de ces facteurs, on pourra vérifier la congruence

$$\nu\beta_0 L + \rho\delta_0 + s\frac{L}{d} \equiv 1 \pmod{d''}$$

et faire en sorte que le premier membre soit positif et moindre que $\frac{Ld''}{d}$. On achèvera comme dans le cas précédent.

Envisageons maintenant une forme

$$ax^2 + bP_i xy + cLy^2, \qquad b^2 P_i - 4acP'_i = D,$$

et soit

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

la forme réduite équivalente dans le sens ordinaire. On aura identiquement

$$\left.\begin{aligned} &ax^2 + bP_i xy + cLy^2 \\ &= A(\lambda x + \mu y)^2 + B(\lambda x + \mu y)(\nu x + \rho y) + C(\nu x + \rho y)^2 \end{aligned}\right\} \quad (\lambda\rho - \mu\nu = 1);$$

il existe une substitution du groupe (A), telle que

$$\begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ \nu, & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, & \beta L \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0, & \mu_0 \\ \nu_0, & \rho_0 \end{pmatrix}$$

soit un *représentant* de (B) dans (A); on aura

$$\begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ \nu, & \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0, & \mu_0 \\ \nu_0, & \rho_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\delta, & \beta L \\ \gamma, & -\alpha \end{pmatrix},$$

la forme quadratique considérée peut donc s'obtenir en faisant dans $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ la substitution $\begin{pmatrix} \lambda_0, & \mu_0 \\ \nu_0, & \rho_0 \end{pmatrix}$, puis dans la nouvelle forme une substitution du groupe à laquelle la forme donnée est attachée. On obtiendra donc des représentants de toutes les classes de formes pour les-

quelles D, P_i et ϖ sont donnés, en formant dans le sens ordinaire toutes les réduites de déterminant DP_i, dont le nombre est fini, en transformant ces réduites par tous les représentants du groupe (B) dans le groupe (A), et en prenant parmi les formes obtenues celles dont le second coefficient est divisible par ϖP_i, et le troisième par L.

Il est possible que l'on obtienne ainsi à la fois plusieurs représentants pour une même classe. Il faut donc avoir un moyen de reconnaître si deux représentants (a, b, c), (a', b', c') sont équivalents ou non. En supposant que l'équivalence ait lieu, on aura

$$a' = a\alpha^2 Q_j + b\alpha\gamma P_i + c\gamma^2 Q'_j, \tag{24}$$

$$b' = 2a\alpha\beta P'_i + b\alpha\delta Q_j + b\beta\gamma Q'_j + 2c\gamma\delta P'_i, \tag{25}$$

$$\alpha\delta Q_j - \beta\gamma Q'_j = 1. \tag{26}$$

On peut remplacer l'équation (24) par la suivante

$$4aa' Q_j = (2a\alpha Q_j + b\gamma P_i)^2 - DP_i\gamma^2, \tag{27}$$

on cherchera des valeurs entières de α et γ satisfaisant à cette équation. Ces valeurs obtenues, on aura

$$\beta = \frac{(b' - b)\alpha Q_j - 2c\gamma P'_i}{2a' P'_i}, \qquad \delta = \frac{2a\alpha P'_i + (b + b')\gamma Q'_j}{2a' P'_i},$$

il faut encore que les valeurs de β et de δ soient entières.

Si D est négatif, l'équation (27) n'admet qu'un nombre limité de solutions. Le nombre des essais à faire pour reconnaître l'équivalence est donc limité.

Si D est positif, on ne peut suivre la même voie. Je m'appuierai alors sur les propriétés de l'équation (21) qui sont analogues à celles de l'équation de Pell. Soient deux solutions de (21) t, u; t', u'.

$$t^2 Q_j - \frac{DQ'_j P'_i}{\theta_j^2} u^2 = 4, \qquad t'^2 Q_h - \frac{DQ'_h P'_i}{\theta_h^2} u'^2 = 4.$$

En multipliant les deux irrationnelles

$$\frac{t\sqrt{Q_j} + u\dfrac{\sqrt{DQ'_j P'_i}}{\theta_j}}{2}, \qquad \frac{t'\sqrt{Q_h} + u'\dfrac{\sqrt{DQ'_h P'_i}}{\theta_h}}{2}, \tag{28}$$

on obtient l'irrationnelle

$$\frac{tt'\sqrt{Q_jQ_h}+uu'\frac{DP'_i}{\theta_j\theta_h}\sqrt{Q'_jQ'_h}+ut'\frac{\sqrt{DQ'_jP'_iQ_h}}{\theta_j}+u't\frac{\sqrt{DQ'_jQ'_hP'_i}}{\theta_h}}{4}.$$

Soient Q_k le produit des modules communs à Q_j et à Q_h et Q_s le produit des modules non communs. La quantité qui précède peut s'écrire

$$\frac{\left(tt'Q_k+uu'\frac{DP'_iL}{\theta_j\theta_hQ_kQ_s}\right)\sqrt{Q_s}+\left(ut'\frac{Q_h}{Q_k\theta_j}+u't\frac{Q_j}{Q_k\theta_h}\right)\sqrt{DQ'_sP'_i}}{4};$$

$\frac{DP'_iL}{\theta_j\theta_hQ_kQ_s}$ est un nombre entier : de plus, dans le multiplicateur de $\sqrt{DQ'_sP'_i}$, il ne peut rester en dénominateur que θ_s qui est le plus grand commun diviseur entre $\varpi Q'_s$ et P'_i. On a alors

$$\frac{t''\sqrt{Q_s}+u''\frac{\sqrt{DQ'_sP'_i}}{\theta_s}}{2},$$

t'' et u'' ne pouvant contenir que 2 au dénominateur, et satisfaisant à l'équation

$$t''^2Q_s-\frac{DQ'_sP'_i}{\theta_s^2}u''^2=4.$$

Mais, si t, u; t', u' correspondent à des transformations de la forme en elle-même, un calcul facile montre que t'' et u'' correspondent au produit de ces deux transformations et sont, par conséquent, entiers.

Par suite, toutes les irrationnelles (28) qui correspondent à des transformations de la forme en elle-même sont des puissances de l'une d'elles

$$\frac{T\sqrt{Q_s}+U\frac{\sqrt{DQ'_sP'_i}}{\theta_s}}{2}.$$

On peut maintenant restreindre à un nombre limité les tâtonnements à faire pour reconnaître si les équations (24), (25), (26) admettent ou non des solutions. On formera une solution réelle quelconque des équations

$$\begin{gathered}a'=a\lambda^2+bP_i\lambda\nu+cL\nu^2,\\ b'P_i=2a\lambda\mu+bP_i(\lambda\rho+\mu\nu)+2cL\nu\rho,\\ \lambda\rho-\mu\nu=1;\end{gathered}$$

si $\frac{DP_i}{\sigma^2}$ est simplement pair;

$$\varepsilon = 2, \qquad \eta = \tau$$

si $\frac{DP_i}{\sigma^2}$ est doublement pair.

Il faut et il suffit que $\frac{DP_i}{\sigma^2\varepsilon^2}$ soit reste quadratique de $\frac{\tau m P'_i}{\eta}$. Ces deux derniers nombres sont premiers entre eux. Aux racines de (18) congrues $(\text{mod}\, 2mP'_i)$ correspondent des racines de

$$z^2 \equiv \frac{DP_i}{\sigma^2\varepsilon^2} \quad \left(\text{mod}\, \frac{\tau m P'_i}{\eta}\right), \tag{31}$$

congrues $\left(\text{mod}\, \frac{2m\varepsilon P'_i}{\eta\eta'}\right)$, où $\eta' = 1$, sauf lorsque $\varepsilon = 2$, $\tau = 2$, alors $\eta' = 2$.

Je distinguerai trois cas :

1° DL est pair; m est donc impair et, par suite, premier avec $\frac{\tau P'_i}{\eta}$. Le nombre des racines de (18) est $2^{\lambda+\mu}$, λ étant un nombre fixe dépendant de D et de P_i, et μ le nombre des facteurs premiers différents de m.

2° DL est impair. Alors $\sigma = 1$, $\tau = 4$, $\varepsilon = 1$, $\eta = 1$, P'_i est impair. Si DP_i est incongru à 1 (mod 8), m est nécessairement impair. La conclusion est la même que dans le cas précédent.

3° DL est impair, et $DP_i \equiv 1 \pmod 8$. m peut être pair. Soient $\lambda - 1$ le nombre des facteurs premiers différents de P'_i, μ le nombre des facteurs premiers différents de m, y compris 2. La congruence (18) a $2^{\lambda+\mu}$ racines.

La formule est donc la même dans les trois cas. Soit $\varkappa$ le nombre des transformations d'une forme en elle-même; on aura

$$\sum_{a,b,c}\sum_{x,y} \frac{1}{(ax^2 + bP_i xy + cLy^2)^{1+\rho}} = \varkappa 2^\lambda \sum_m \frac{2^\mu}{m^{1+\rho}}.$$

Dans le second membre, m prend toutes les valeurs positives premières à DL et telles que $\frac{DP_i}{\sigma^2\varepsilon^2}$ soit reste quadratique de m. Dans le premier,

$$x = x_0\sqrt{Q_j}, \qquad y = \frac{y_0}{\sqrt{Q_j}},$$

x_0 et y_0 étant premiers entre eux, et tels que $ax^2 + bP_i xy + cLy^2$ soit premier à DL. Posons, pour abréger,

$$\frac{DP_i}{\sigma^2\varepsilon^2} = D_1,$$

on aura, d'après une transformation connue,

$$\sum \frac{2^{\mu}}{m^{1+\rho}} = \theta \frac{\sum \frac{1}{n^{1+\rho}} \sum \left(\frac{D_1}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\rho}}}{\sum \frac{1}{n^{2+2\rho}}},$$

n étant seulement assujetti à être premier à $2DL$, $\theta = 1$ dans les deux cas où m est nécessairement impair, et $\theta = \frac{2^{\rho+1}+1}{2^{\rho+1}-1}$ dans le dernier. On a, par suite,

$$(17) \quad \sum_{a,b,c} \sum_{x,y} \sum_{n} \frac{1}{(an^2x^2 + bP_i n^2 xy + cLn^2y^2)^{1+\rho}} = \varkappa 2^{\lambda} \theta \sum \frac{1}{n^{1+\rho}} \sum \left(\frac{D_1}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\rho}}.$$

Dans le cas où DL est pair, le complexe des nombres nx et ny est identique au complexe des nombres x', y', tels que la forme

$$ax'^2 + bP_i x'y' + cLy'^2$$

soit première avec DL. Mais, dans le cas où DL est impair, on a

$$\sum_{x',y'} \frac{1}{(ax'^2 + bP_i x'y' + cLy'^2)^{1+\rho}}$$
$$= \sum_{l} \frac{1}{2^{2l+2l\rho}} \sum_{n;\,x,y} \frac{1}{(an^2x^2 + bP_i n^2xy + cLn^2y^2)^{1+\rho}};$$

d'où

$$(32) \quad \sum_{a,b,c} \sum_{x',y'} \frac{1}{(ax'^2 + bP_i x'y' + cLy'^2)^{1+\rho}} = \theta\zeta\varkappa 2^{\lambda} \sum_{n} \frac{1}{n^{1+\rho}} \sum_{n} \left(\frac{D_1}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\rho}},$$

$\zeta = 1$, $\frac{2^{2\rho+2}}{2^{2\rho+2}-1}$ suivant que DL est pair ou impair. Je multiplie par ρ les deux membres de l'égalité (32), et je fais tendre ρ vers zéro. La limite de $\theta\zeta$ est 1, $\frac{4}{3}$, 4 suivant le cas.

La limite de $\rho \sum \frac{1}{n^{1+\rho}}$ est $\frac{\varphi(2DL)}{2DL}$. Enfin $\sum_{n} \left(\frac{D_1}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\rho}}$ a pour limite

$$\sum \left(\frac{D_1}{n}\right) \frac{1}{n}.$$

Il reste à trouver la limite du premier membre. Pour cela, je vais étudier la formation des nombres x', y'. Avant tout, x'_0 est premier avec Q'_j, et y'_0 avec Q_j.

Remarquons que, dans toutes les formes que nous avons prises comme

représentant chaque classe, on peut supposer a premier avec DL. Il suffit de montrer qu'on peut déterminer une substitution $\begin{pmatrix} \alpha\sqrt{Q_j}, & \dfrac{\beta L}{\sqrt{Q_j}} \\ \dfrac{\gamma}{\sqrt{Q_j}}, & \delta\sqrt{Q_j} \end{pmatrix}$, telle que

$$a\alpha^2 Q_j + bP_i\alpha\gamma + c\gamma^2 Q'_j$$

ne soit divisible par aucun facteur premier f de DL. Si f divise a et c, il ne peut diviser bP_i; on prendra donc pour α et γ des nombres non divisibles par f. Si l'un au moins des deux coefficients extrêmes, a, par exemple, n'est pas divisible par f, et que, de plus, f ne divise pas L, on prendra pour γ un multiple de f; si f divise L, on fera entrer dans Q'_j celui des modules qui le contient.

Distinguons maintenant deux cas :

1° D *est premier avec* L. — Alors a et c sont premiers avec P_i.

J'exprime que $aQ_jx_0'^2 + bP_ix'_0y'_0 + cQ'_jy_0'^2$ est premier.

(A) avec Q_j.

Il suffit évidemment d'exprimer que $bP_ix'_0 + cQ'_jy'_0$ est premier avec Q_j. Soient Q_{j1} le produit des modules communs à P_i et à Q_j, et $Q_j = Q_{j1}Q_{j2}$. c, Q'_j et y'_0 sont premiers avec Q_{j1}; il en est donc de même de $bP_ix'_0 + cQ'_jy'_0$. Q_{j2} est un diviseur de P'_i et, par suite, premier avec bP_i. Soit R_{j2} un reste quelconque de Q_{j2} premier avec Q_{j2}. La congruence

$$bP_ix'_0 + cQ'_jy'_0 \equiv R_{j2} \pmod{Q_{j2}}$$

donnera pour une valeur quelconque de y'_0 $(\bmod Q_{j2})$ une valeur de x'_0 $(\bmod Q_{j2})$.

(B) avec Q'_j.

Soient Q'_{j1} le produit des modules communs à P_i et à Q'_j, et $Q'_j = Q'_{j1}Q'_{j2}$, R'_{j2} un reste quelconque de Q'_{j2} premier avec Q'_{j2}, on posera

$$aQ_jx'_0 + bP_iy'_0 \equiv R'_{j2} \pmod{Q'_{j2}},$$

ce qui, pour toute valeur de x'_0 $(\bmod Q'_{j2})$ donnera une valeur de y'_0 par rapport au même module.

(C) avec D :

Si D est impair, $4aQ_j$ est premier avec D : il suffit donc d'exprimer que

$$4a^2Q_j^2x_0'^2 + 4abP_iQ_jx'_0y'_0 + 4acLy_0'^2 = (2aQ_jx'_0 + bP_iy'_0)^2 - DP_iy_0'^2,$$

et, par suite, que $2aQ_jx'_0 + bP_iy'_0$ est premier avec D. Soit $\mathfrak{A}$ un reste quelconque (mod D) et premier avec D, la congruence

$$2aQ_jx'_0 + bP_iy'_0 \equiv \mathfrak{A} \qquad (\mathrm{mod}\, D)$$

fournit pour toute valeur de y'_0 (mod D) une valeur de x'_0 (mod D).

Si D est pair, il est nécessairement divisible par 4; je suppose d'abord $\frac{D}{4}$ impair. Soit $\mathfrak{A}$ un reste $\left(\mathrm{mod}\,\frac{D}{4}\right)$, on aura les deux congruences

$$aQ_jx'_0 + \frac{b}{2}P_iy'_0 \equiv \mathfrak{A} \qquad \left(\mathrm{mod}\,\frac{D}{4}\right)$$

et

$$aQ_jx'_0 + \frac{bP_i}{2}y'_0 \equiv y'_0 \qquad (\mathrm{mod}\, 2).$$

Si D est divisible par 8, il suffit de vérifier la congruence

$$aQ_jx'_0 + \frac{b}{2}P_iy'_0 \equiv \mathfrak{A} \qquad \left(\mathrm{mod}\,\frac{D}{4}\right).$$

En résumé, les valeurs de x'_0 et de y'_0 forment des progressions arithmétiques ayant pour raisons respectives $\Delta Q'_j Q_{j2}$ et $\Delta Q_j Q'_{j2}$.

Le nombre des systèmes de valeurs de x'_0 et de y'_0 pour lesquels ces quantités sont positives et moindres que les raisons est dans tous les cas $\Delta\varphi(\Delta L)\varphi(P'_i)$.

Par suite, en appelant N le nombre des modules du groupe et h le nombre des classes,

$$\rho \sum_{a,b,c} \sum_{x',y'} \frac{1}{(ax'^2 + bP_ix'y' + cLy'^2)^{1+\rho}}$$

a pour limite

$$\frac{2^{N+1}\pi\,\varphi(\Delta L)\,\varphi(P'_i)\,h}{\Delta^{\frac{3}{2}} P_i^{\frac{1}{2}} L P'_i}.$$

2° D *n'est pas premier avec* L. — Comme b est premier avec P'_i, tout facteur commun à D et à L divise P_i. a étant premier avec DL, ces facteurs divisent c. Si Q_j contient l'un quelconque des modules qui ne sont pas premiers avec c, la forme ne pourra être première à DL. Soit P_c le produit de ces modules : Q_j sera un diviseur de P'_c; soit $P'_c = Q_jQ''_j$, et l'on aura

$$aQ_jx'^2_0 + bP_ix'_0y'_0 + cP_cQ''_jy'^2_0;$$

nous sommes en présence d'une forme (a, bP_c, cP_c), dans laquelle le pro-

duit des modules est P'_c, et le déterminant DP_c est premier avec P'_c. Nous sommes ramenés au cas précédent. Par suite,

$$\rho \sum_{a,b,c} \sum_{x',y'} \frac{1}{(ax'^2 + bP_i x'y' + cLy'^2)^{1+\rho}}$$

a pour limite

$$\frac{2^{N_1+1}\pi\,\varphi(\Delta L)\,\varphi(P'_i)\,h}{\Delta^{\frac{3}{2}} P_i^{\frac{1}{2}} L P'_i},$$

N_1 désignant le nombre des modules du groupe qui entrent dans P'_c.

Soient $\theta' = \frac{1}{2}$ si DL est impair et $\theta' = 1$ si DL est pair. On a, par suite, D étant premier avec L,

$$(33) \qquad h = \theta\theta'\zeta\varkappa\, 2^{\lambda-N-1} \frac{(\Delta P_i)^{\frac{1}{2}} P'_i}{\pi\,\varphi(P'_i)} \sum_n \left(\frac{D_1}{n}\right)\frac{1}{n}$$

et, D n'étant pas premier avec L,

$$(34) \qquad h = \theta\theta'\zeta\varkappa\, 2^{\lambda-N_1-1} \frac{(\Delta P_i)^{\frac{1}{2}} P'_i}{\pi\,\varphi(P'_i)} \sum_n \left(\frac{D_1}{n}\right)\frac{1}{n}.$$

Dans les séries $\sum\left(\frac{D_1}{n}\right)\frac{1}{n}$, n est assujetti à être premier à 2DL. Soit δ^2 le plus grand carré contenu dans D_1, et $D_1 = -\delta^2 P$ si D_1 contient une puissance paire de 2, $D_1 = -2\delta^2 P$ si D_1 contient une puissance impaire de 2. $\left(\frac{D_1}{n}\right) = \left(\frac{-P}{n}\right)$ ou $\left(\frac{-2P}{n}\right)$ suivant le cas. Soient $f_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ les facteurs premiers impairs de DL qui n'entrent pas dans D_1. Supposons, pour fixer les idées, $-P \equiv 1 \pmod 4$. On a

$$\left(\frac{-P}{n}\right) = \left(\frac{n}{P}\right), \qquad \sum\left(\frac{D_1}{n}\right)\frac{1}{n} = \sum\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n},$$

n étant premier avec 2DL. Désignons par m un nombre quelconque. La somme $\sum_m \left(\frac{m}{P}\right)\frac{1}{m}$ se compose de la somme $\sum_n \left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n}$, moins la somme étendue aux nombres qui admettent les diviseurs 2 ou f_i; on a, par suite,

$$\sum_n \left(\frac{D_1}{n}\right)\frac{1}{n} = \left[1 - \left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}\right] \prod_i \left[1 - \left(\frac{f_i}{P}\right)\frac{1}{f_i}\right] \sum_m \left(\frac{m}{P}\right)\frac{1}{m}.$$

Or on a, $-\mathrm{P}$ étant, par hypothèse, resté quadratique de f_i,

$$\left(\frac{-\mathrm{P}}{f_i}\right)=1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{f_i}{\mathrm{P}}\right)=\left(\frac{-\mathrm{P}}{f_i}\right).$$

Donc

$$(35) \qquad \sum_n\left(\frac{\mathrm{D}_1}{n}\right)=\left[1-\left(\frac{2}{\mathrm{P}}\right)\frac{1}{2}\right]\prod_i\left(1-\frac{1}{f_i}\right)\sum_m\left(\frac{m}{\mathrm{P}_1}\right)\frac{1}{m};$$

on est ramené ainsi au calcul d'une série connnue. On a de même

$$\text{Pour } \frac{\mathrm{D}_1}{\delta^2}\equiv 3 \pmod 4 \ldots \quad \sum_n\left(\frac{\mathrm{D}_1}{n}\right)\frac{1}{n}=\prod\left(1-\frac{1}{f_i}\right)\sum_m\left(\frac{m}{\mathrm{P}}\right)(-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{2}{m}$$

$$\text{Pour } \frac{\mathrm{D}_1}{\delta^2}\equiv 2 \pmod 8 \ldots \quad \sum_n\left(\frac{\mathrm{D}_1}{n}\right)\frac{1}{n}=\prod\left(1-\frac{1}{f_i}\right)\sum_m\left(\frac{m}{\mathrm{P}}\right)(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\frac{1}{m}$$

$$\text{Pour } \frac{\mathrm{D}_1}{\delta^2}\equiv 6 \pmod 8 \ldots \quad \sum_n\left(\frac{\mathrm{D}_1}{n}\right)\frac{1}{n}=\prod\left(1-\frac{1}{f_i}\right)\sum_m\left(\frac{m}{\mathrm{P}}\right)(-1)^{\frac{m^2+4m-5}{8}}\frac{1}{m}$$

Dans ces trois dernières séries, m est un nombre impair quelconque.

VI.

Proposons-nous maintenant la recherche des points singuliers offerts par l'équation fuchsienne qu'engendre un groupe donné par ses modules. Une substitution de période n

$$\left(z, \frac{\alpha \mathrm{P}_i z+\beta \mathrm{L}}{\gamma z+\delta \mathrm{P}_i}\right)$$

peut être aussi caractérisée par l'équation de ses points doubles

$$(36) \qquad \gamma z^2+(\delta-\alpha)\mathrm{P}_i z-\beta \mathrm{L}=0,$$

car on connaît ainsi γ, β et $\delta-\alpha$ et $(\alpha+\delta)\sqrt{\mathrm{P}_i}=2\cos\frac{\pi}{n}$. Le discriminant de la forme $(\gamma, \delta-\alpha, \beta)$ est $-4\mathrm{P}_i\sin^2\frac{\pi}{n}$. Toutes les substitutions qui correspondent à des formes d'une même classe ont des points doubles homologues les uns des autres dans le groupe donné et, par suite, correspondent à un même point singulier de l'équation fuchsienne.

Réciproquement, étant donnée une forme

$$a x^2+b \mathrm{P}_k \mathrm{P}_i x y+c \mathrm{L} y^2,$$

$$(37) \qquad \mathrm{P}_k\left(b^2 \mathrm{P}_k \mathrm{P}_i-4 a c \frac{\mathrm{P}_i'}{\mathrm{P}_k}\right)=-4 \sin^2\frac{\pi}{n},$$

dans laquelle P_i et P_k sont deux produits de modules différents, et où b est

premier avec $\frac{P'_i}{P_k}$, si l'on pose

$$(38)\qquad \gamma = a,\qquad \delta - \alpha = bP_k,\qquad \beta = -c,\qquad (\alpha+\delta)\sqrt{P_i} = 2\cos\frac{\pi}{n},$$

on aura identiquement

$$\alpha\delta P_i - \beta\gamma P'_i = 1;$$

pour que, à la forme donnée corresponde une substitution linéaire de période n, il suffit que α, β, γ, δ fournis par les formules (38) aient des valeurs entières. Cela ne peut avoir lieu que pour $n = \infty$, 2, 3, 4, 6.

1° $n = \infty$. On a

$$(\alpha+\delta)\sqrt{P_i} = 2,$$

donc ou bien

$$(A)\qquad \alpha+\delta = 2,\qquad P_i = 1,$$

donc,

$$b^2 P_k - 4acP'_k = 0;$$

or b est premier avec P'_k, donc

$$P'_k = 1,\qquad P_k = L;$$

bL est nécessairement pair, donc $\delta - \alpha$ fourni par (38) est pair, et les valeurs de α, β, γ, δ sont entières. Il y a donc dans chaque groupe des substitutions paraboliques de cette espèce

$$(B)\qquad \alpha+\delta = 1,\qquad P_i = 4,$$

ce qui exige que 4 soit un des modules du groupe; on a ensuite

$$4b^2 P_k - acP'_k = 0,$$

$\delta - \alpha$ doit être impair : il en est donc de même de b et de P_k; ainsi P'_k contient le module 4, et l'on aura

$$b^2 P_k - ac\frac{P'_k}{4} = 0.$$

Tout groupe à module 4 contiendra de ces substitutions. Exemple : dans le groupe au module unique 4, $\left(z, \frac{-4}{z+4}\right)$.

2° $n = 2$:

$$\alpha+\delta = 0,\qquad P_k\left(b^2 P_k P_i - 4ac\frac{P'_i}{P_k}\right) = -4.$$

Donc

$$P_k = 1,\ 2,\ 4.$$

$$(A)\qquad P_k = 1,\qquad b^2 P_i - 4acP'_i = -4,$$

$bP_k = b$ est nécessairement pair; on aura donc

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 P_i - acP'_i = -1.$$

Il faut et il suffit, pour qu'on puisse former ces substitutions, que $-P_i$ soit reste quadratique de P'_i.

(B) $$P_k = 2;$$

2 est donc un des modules.

$$b^2 P_i - acP'_i = -1;$$

P_i ne contient pas le module 2; par suite, toute solution de cette équation donne un b impair. Il faut que $-P_i$ soit reste quadratique de $\frac{P'_i}{2}$. Exemple : dans le groupe à modules 2 et 5, $\left(z, \frac{-3z-10}{z+3}\right)$.

(C) $$P_k = 4.$$

On a

$$4b^2 P_i - 4ac\frac{P'_i}{P_k} = -1,$$

égalité impossible. Il faut donc rejeter cette hypothèse.

3° $n = 3$:

$$\alpha + \delta = P_i = 1, \qquad P_k\left(b^2 P_k P_i - 4ac\frac{P'_i}{P_k}\right) = -3, \qquad P_k = 1,\ 3.$$

(A) $$P_k = 1, \qquad b^2 - 4acL = -3,$$

b doit être premier avec L qui ne contient pas le facteur; -3 doit être reste quadratique de $4L$; L est donc impair, et ses facteurs premiers sont de la forme $3n+1$. Ces conditions étant réalisées, b est impair, et les valeurs des coefficients sont entières.

(B) $$P_k = 3, \qquad 3b^2 - 4ac\frac{L}{3} = -1,$$

un des modules est égal à 3; $\frac{L}{3}$ ne contient pas 3, et -3 doit être reste quadratique de $4\frac{L}{3}$, ce qui exige que L soit impair, et que $\frac{L}{3}$ ne contienne que des facteurs de la forme $3n+1$. Exemple : modules 3 et 7, $\left(z, \frac{-4z-21}{z+5}\right)$.

4° $n = 4$.

$$\alpha + \delta = 1, \qquad P_i = 2, \qquad P_k\left(2b^2 P_k - 2ac\frac{L}{P_k}\right) = -2;$$

un des modules est égal à 2. On a ensuite

$$P_k = 1 \qquad \text{et} \qquad b^2 - ac\,L = -1.$$

-1 devant être reste quadratique de L, tous ses facteurs premiers impairs seront de la forme $4n+1$.

5° $n = 6$.

$$\alpha + \delta = 1, \qquad P_i = 3, \qquad P_k\left(b^2 P_k P_i - 4ac\frac{P'_i}{P_k}\right) = -1;$$

donc

$$P_k = 1, \qquad 3b^2 - 4ac\frac{L}{3} = -1.$$

Donc L est impair, et, à part, 3 ne contient que des facteurs premiers de la forme $3n+1$.

Quand on aura déterminé les différentes espèces de points singuliers qui peuvent se présenter, il faudra encore chercher le nombre des points singuliers de chaque espèce ou le nombre des classes de formes correspondantes. Une forme pour laquelle $D = 0$ est le carré d'une forme linéaire $cx + dy$, dans laquelle les coefficients de x et de y sont premiers entre eux. La théorie de ces formes linéaires est analogue à celle des formes du second degré. Il suffit de reconnaître combien il y a de fractions $-\frac{d}{c}$ non homologues entre elles par rapport au groupe.

Pour le nombre des autres points singuliers dans chaque espèce, il est donné par les formules du § V.

Exemple. — Dans le groupe à modules 2, 3 et 5, $-15 = -P_i$ est reste quadratique de $\frac{P'_i}{2} = 1$. Il y a donc des substitutions de période 2 avec $P_k = 2$, $P_i = 15$. Pour les formes correspondantes

$$D_1 = -15, \qquad \Delta P_i = 60, \qquad \theta = 1,$$
$$\zeta = 1, \qquad \theta' = 1, \qquad \varkappa = 4, \qquad \lambda = 0, \qquad N_1 = 2, \qquad P_c = 2;$$

donc, d'après (34),

$$h = \frac{2\sqrt{15}}{\pi}\sum\left(\frac{-15}{n}\right)\frac{1}{n} = \sum\left(\frac{\alpha'}{15}\right),$$

α étant l'un quelconque des nombres premiers avec 15 et < 15. D'où

$$h = 2.$$

VII.

La théorie précédente est susceptible de généralisation dans plusieurs sens différents.

1° *Groupes à plusieurs systèmes de modules.* — Imaginons un système de substitutions linéaires à coefficients entiers et à déterminant 1

$$\begin{pmatrix} m^{(1)}, & n^{(1)} \\ p^{(1)}, & q^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m^{(2)}, & n^{(2)} \\ p^{(2)}, & q^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m^{(3)}, & n^{(3)} \\ p^{(3)}, & q^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{pmatrix} m^{(r)}, & n^{(r)} \\ p^{(r)}, & q^{(r)} \end{pmatrix},$$

et plusieurs systèmes de nombres entiers contenant chacun la même totalité de nombres

$$\begin{array}{ll} a_1^{(1)},\ a_2^{(1)},\ \ldots,\ a_n^{(1)}; & a_1^{(1)} a_2^{(1)} \ldots a_n^{(1)} = \mathrm{L}^{(1)}, \\ a_1^{(2)},\ a_2^{(2)},\ \ldots,\ a_n^{(2)}; & a_1^{(2)} a_2^{(2)} \ldots a_n^{(2)} = \mathrm{L}^{(2)}, \\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots; & \ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_1^{(r)},\ a_2^{(r)},\ \ldots,\ a_n^{(r)}; & a_1^{(r)} a_2^{(r)} \ldots a_n^{(r)} = \mathrm{L}^{(r)}, \end{array}$$

je les nommerai *systèmes de modules*. Les modules d'un même système sont premiers entre eux deux à deux. Je désignerai par $\mathrm{P}_i^1, \mathrm{P}_i^2, \ldots, \mathrm{P}_i^{(r)}$ des produits de modules correspondants, chaque module ne pouvant figurer plus d'une fois dans le produit correspondant. Soient A, B, Γ, Δ des entiers satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\mathrm{A}\Delta - \mathrm{B}\Gamma = \mathrm{P}_i^{(1)} \mathrm{P}_i^{(2)} \ldots \mathrm{P}_i^{(r)},$$

$\dfrac{\mathrm{A}+\Delta}{\mathrm{P}_i^1}$ et $\dfrac{2\Gamma m^{(1)} n^{(1)} + (\Delta - \mathrm{A})(n^{(1)} p^{(1)} + m^{(1)} q^{(1)}) - 2\mathrm{B} p^{(1)} q^{(1)}}{\mathrm{P}_i^{(1)}}$ sont entiers et de même parité. $\Gamma n^{(1)2} + (\Delta - \mathrm{A}) n^{(1)} q^{(1)} - \mathrm{B} q^{(1)2}$ est divisible par $\mathrm{L}^{(1)}$. Il en est de même relativement à chaque système de modules. $\dfrac{\mathrm{A}z + \mathrm{B}}{\Gamma z + \Delta}$ sera l'expression générale des substitutions d'un groupe.

Comme exemple, je citerai le groupe formé par les deux espèces de substitutions

$$\left(z, \frac{\alpha z + 3\beta}{2\gamma z + \delta}\right), \quad \left(z, \frac{6\alpha z + 3\beta}{2\gamma z + 6\delta}\right);$$

dans le premier cas, $\alpha\delta - 6\beta\gamma = 1$; dans le second cas, $6\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

2° *Groupes à coefficients irrationnels.* — Je prendrai comme exemple

le groupe engendré par les deux substitutions

$$(z,\ z+1),\quad \left(z,\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2z}\right).$$

On vérifie que les substitutions peuvent se classer en deux espèces, les uns à déterminant 1, les autres à déterminant $6-2\sqrt{5}$. Mais ces conditions ne suffisent pas, comme lorsque les coefficients sont entiers, à définir le groupe.

3° Nous savons que les nombres de la forme $a+bi$, où a et b sont entiers, jouissent des mêmes propriétés que les nombres entiers au point de vue de la divisibilité. Nous pourrons donc former un système de nombres complexes premiers entre eux deux à deux, qui seront les *modules*. Soient P_i un produit de ces modules et L le produit de tous les modules. Si l'on pose

$$\lambda = \alpha P_i(x+iy) + \beta L,$$
$$\mu = \gamma(x+iy) + \delta P_i,$$

α, β, γ, δ étant quatre nombres complexes satisfaisant à la relation

$$\alpha\delta P_i - \beta\gamma P'_i = 1,$$

les substitutions

$$\begin{pmatrix} x+iy, & \dfrac{\lambda\mu_0+\alpha P_i\gamma_0 z^2}{\mu\mu_0+\alpha\alpha_0 P_i P_{i_0} z^2} \\ z, & \dfrac{z^2}{\mu\mu_0+\alpha\alpha_0 P_i P_{i_0} z^2} \end{pmatrix}$$

forment un groupe discontinu.

SUR

CERTAINS DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES;

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. LERCH A M. APPELL.

La méthode que vous avez appliquée ([1]) au développement en séries trigonométriques de la fonction $\frac{d\mathfrak{S}_1}{du}$ m'a suggéré quelques considérations que je prends la liberté de vous communiquer.

La série qui définit la fonction $\frac{d\mathfrak{S}_1}{du}$ de votre Mémoire est contenue dans la suivante

$$\mathfrak{F}(x, s, u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(x-m)^2 + u]^{\frac{1}{2}s}}, \tag{1}$$

dont je vais m'occuper.

Je suppose que les trois quantités x, u, s soient réelles et que la quantité $\mathfrak{R}(x)^2 + u$ soit positive, $\mathfrak{R}(x)$ désignant la plus petite en valeur absolue des quantités $x - m$, $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$, et que la puissance

$$[(x-m)^2 + u]^{\frac{1}{2}s}$$

soit prise dans le sens arithmétique. La formule

$$\int_0^\infty e^{-z[(x-m)^2+u]} z^{\frac{1}{2}s-1}\, dz = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}s)}{[(x-m)^2+u]^{\frac{1}{2}s}} \tag{2}$$

nous permet de mettre la série (1) sous la forme

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}s)\,\mathfrak{F}(x, s, u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty e^{-z[(x-m)^2+u]} z^{\frac{1}{2}s-1}\, dz, \tag{3}$$

([1]) *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Jordan, année 1886.

de sorte que, si nous pouvons démontrer la formule

$$(4)\qquad \sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-z[(x-m)^2+u]}\,z^{\frac{1}{2}s-1}\,dz=\int_0^{\infty}\sum_m e^{-z[(x-m)^2+u]}\,z^{\frac{1}{2}s-1}\,dz,$$

nous aurons l'équation

$$(5)\qquad \Gamma(\tfrac{1}{2}s)\,\mathfrak{F}(x,s,u)=\int_0^{\infty} e^{-uz-x^2z}\,\vartheta_3\left(\frac{xz}{\pi i}\,\Big|\,\frac{zi}{\pi}\right)z^{\frac{1}{2}s-1}\,dz,$$

en posant

$$\vartheta_3(v\,|\,\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(m^2\tau+2mv)}.$$

La formule de Cauchy et de Poisson relative à la transformation de la fonction ϑ nous donne, comme dans votre Mémoire,

$$(6)\qquad \vartheta_3\left(\frac{xz}{\pi i}\,\Big|\,\frac{zi}{\pi}\right)=\sqrt{\pi}\,z^{-\frac{1}{2}}e^{x^2z}\,\vartheta_3\left(x\,\Big|\,\frac{\pi i}{z}\right),$$

de sorte que l'équation (5) devient

$$(7)\qquad \pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\tfrac{1}{2}s)\,\mathfrak{F}(x,s,u)=\int_0^{\infty} e^{-uz}\,\vartheta_3\left(x\,\Big|\,\frac{\pi i}{z}\right)z^{\frac{s-3}{2}}\,dz,$$

et, si l'intégrale, dans le second membre de cette équation, est égale à la somme des intégrales des termes de la série

$$(8)\qquad e^{-uz}\,\vartheta_3\left(x\,\Big|\,\frac{\pi i}{z}\right)z^{\frac{s-3}{2}}=e^{-uz}z^{\frac{s-3}{2}}+2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-uz-\frac{\pi^2n^2}{z}}\,z^{\frac{s-3}{2}}\cos 2n\pi x,$$

nous aurons évidemment

$$(9)\qquad \pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\tfrac{1}{2}s)\,\mathfrak{F}(x,s,u)=\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)u^{-\frac{s-1}{2}}+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{A}_n\cos 2n\pi x,$$

en posant

$$(10)\qquad \mathfrak{A}_n=\int_0^{\infty} e^{-uz-\frac{\pi^2n^2}{z}}\,z^{\frac{s-3}{2}}\,dz.$$

Or, pour que ces conclusions soient permises, on doit prouver que l'égalité (4) subsiste et que la série (8) permet l'intégration à termes.

Mais, d'abord, considérons l'intégrale (5). La fonction à intégrer ne pré-

sentant des singularités qu'aux limites de l'intégration $z = 0, \infty$, il suffit de l'étudier au voisinage de ces limites. Pour des valeurs de z infiniment petites, la fonction à intégrer a, d'après l'équation (6), la forme

$$\sqrt{\pi} e^{-uz} z^{\frac{s-3}{2}} + \varepsilon,$$

ε désignant une fonction infiniment petite, et, par conséquent, la seule condition à remplir, pour que la fonction considérée soit intégrable pour des valeurs infiniment petites de z, est celle que la quantité $s - 1$ soit positive. D'autre part, la fonction à intégrer étant donnée par la somme des termes de la forme

$$e^{-z[(x-m)^2+u]} z^{\frac{1}{2}s-1}$$

deviendra infiniment petite pour des valeurs indéfiniment croissantes de z, et cela aussi quand on la multiplie par une puissance quelconque de z, et, par conséquent, l'intégrabilité relative à la limite $z = \infty$ de la fonction considérée n'exige aucune condition nouvelle.

Donc l'intégrale (5) *aura toujours une valeur finie, si la quantité* $s - 1$, *ainsi que* $\mathfrak{R}(x)^2 + u$, *est positive.*

L'existence de l'intégrale (5) étant démontrée, je vais prouver l'égalité des deux membres de l'équation (4). La série

$$\varphi(z) = \sum_m e^{-z[(x-m)^2+u]} z^{\frac{1}{2}s-1}$$

étant uniformément convergente dans chaque intervalle $(\delta, \ldots, h)$ à limites positives, on aura, d'après un théorème connu,

$$(a) \qquad \int_\delta^h \varphi(z)\, dz = \sum_m \mathfrak{I}_m(\delta, h),$$

en posant

$$(b) \qquad \mathfrak{I}_m(\delta, h) = \int_\delta^h e^{-z[(x-m)^2+u]} z^{\frac{1}{2}s-1}\, dz.$$

Or les termes de la série (1) ne différant de ceux de la série

$$(c) \qquad \sum_m \mathfrak{I}_m(0, \infty)$$

que par un facteur constant, comme le montre l'équation (2), cette série (c) est évidemment convergente et se compose de termes positifs. Je vais montrer que la différence

$$(d)\qquad \sum_m \mathfrak{J}_m(0,\infty) - \sum_m \mathfrak{J}_m(\delta,h) = \sum_m \mathfrak{J}_m(0,\delta) + \sum_m \mathfrak{J}_m(h,\infty)$$

est moindre qu'une quantité ε donnée arbitrairement, si l'on prend $\delta \leqq \delta_0$, $h \geqq h_0$, δ_0 et h_0 désignant deux quantités positives dépendantes de c.

En effet, les intégrales $\mathfrak{J}_m(0,\delta)$, $\mathfrak{J}_m(h,\infty)$ étant positives et moindres que $\mathfrak{J}_m(0,\infty)$ et la série (c) étant convergente, on peut déterminer un nombre entier r, tel que l'inégalité

$$(e)\qquad \begin{cases} \sum_m{}' \mathfrak{J}_m(0,\delta) < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \sum_m{}' \mathfrak{J}_m(h,\infty) < \frac{\varepsilon}{4} \\ (m = r+1, r+2, r+3, \ldots, -r-1, -r-2, -r-3, \ldots) \end{cases}$$

subsiste, quelles que soient les quantités positives δ, h. D'autre part, on peut déterminer deux quantités δ_0, h_0, telles que, pour chaque valeur de $\delta \leqq \delta_0$ et de $h \geqq h_0$, chacune des intégrales

$$\mathfrak{J}_n(0,\delta), \quad \mathfrak{J}_n(h,\infty) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm r)$$

soit moindre que $\frac{\varepsilon}{4(2r+1)}$, de sorte qu'on aura

$$(f)\qquad \sum_{n=-r}^{r} \mathfrak{J}_n(0,\delta) < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \sum_{n=-r}^{r} \mathfrak{J}_n(h,\infty) < \frac{\varepsilon}{4},$$

et, puisque

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \mathfrak{J}_\mu(0,\delta) = \sum_{n=-r}^{r} \mathfrak{J}_n(0,\delta) + \sum_m{}' \mathfrak{J}_m(0,\delta),$$

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \mathfrak{J}_\mu(h,\infty) = \sum_{n=-r}^{r} \mathfrak{J}_n(h,\infty) + \sum_m{}' \mathfrak{J}_m(h,\infty)$$

$$(m = r+1, r+2, \ldots, -r-1, -r-2, \ldots),$$

on en conclut, au moyen des inégalités (e), (f), que ces quantités sont moindres que $\frac{\varepsilon}{2}$, d'où il suit que la quantité (d) est inférieure à ε pour chaque valeur de $\delta \leqq \delta_0$, $h \geqq h_0$. C. Q. F. D.

... s'exprime par la formule

$$\sum_m \mathfrak{Z}_m(0, \infty),$$

...près la formule (a), avec la quantité

$$... dz = \int_0^\infty \varphi(z)\, dz,$$

...est exacte.

...le-ci ne peut subsister que si u est positif, ...ment. C'est en supposant cette condition rem-...r.

..., on a

$$\int_0^\infty e^{-uz} z^{\frac{s-3}{2}} dz + 2\int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-uz - \frac{\pi^2 n^2}{z}} z^{\frac{s-3}{2}} \cos 2n\pi x\, dz,$$

...considérer l'intégrale

$$\mathfrak{Z} = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-uz - \frac{\pi^2 n^2}{z}} z^{\frac{s-3}{2}} \cos 2n\pi x\, dz.$$

...n à intégrer étant donnée par une série uniformément conver-...chaque intervalle $(0, \ldots, h)$, où h désigne une quantité positive ...e, on a, d'après un théorème connu,

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{Z}(h) &= \int_0^h \sum_{n=1}^\infty e^{-uz - \frac{\pi^2 n^2}{z}} z^{\frac{s-3}{2}} \cos 2n\pi x\, dz \\ &= \sum_{n=1}^\infty \cos 2n\pi x \int_0^h e^{-uz - \frac{\pi^2 n^2}{z}} z^{\frac{s-3}{2}} dz, \end{aligned}\right.$$

et je vais démontrer l'égalité

$$(\gamma) \qquad \mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}(\infty) = \sum_{n=1}^\infty \cos 2n\pi x \int_0^\infty e^{-uz - \frac{\pi^2 n^2}{z}} z^{\frac{s-3}{2}} dz.$$

J'applique, à cet effet, la substitution $z = \frac{\pi n}{\sqrt{u}} t$, dont vous avez fait usage

pour donner aux coefficients d'une certaine série trigonométrique la même forme sous laquelle on les rencontre chez *Riemann*. A l'aide de cette substitution, il vient

$$(\delta) \qquad \mathcal{A}_n = \int_0^\infty e^{-uz-\frac{\pi^2 n^2}{z}} z^{\frac{s-3}{2}} dz = \left(\frac{\pi n}{\sqrt{u}}\right)^{\frac{s-1}{2}} \int_0^\infty e^{-\pi n\sqrt{u}\left(t+\frac{1}{t}\right)} t^{\frac{s-3}{2}} dt.$$

En décomposant cette dernière intégrale en deux autres prises entre les limites $(0, \ldots, 1)$ et $(1, \ldots, \infty)$ et en changeant, dans la seconde, t en $\frac{1}{t}$, il vient

$$(\varepsilon) \qquad \mathcal{A}_n = \left(\frac{\pi n}{\sqrt{u}}\right)^{\frac{s-1}{2}} \int_0^1 e^{-\pi n\sqrt{u}\left(t+\frac{1}{t}\right)} \left(t^{\frac{s-1}{2}} + t^{\frac{1-s}{2}}\right) \frac{dt}{t}.$$

La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{\sqrt{u}}\right)^{\frac{s-1}{2}} e^{-\pi n\sqrt{u}\left(t+\frac{1}{t}\right)} \left(t^{\frac{s-1}{2}} + t^{\frac{1-s}{2}}\right) \frac{1}{t}$$

étant uniformément convergente dans l'intervalle $(0, \ldots, 1)$, quelle que soit la quantité s, la série composée des intégrales de ses termes prises entre les limites $(0, \ldots, 1)$ sera convergente; or cette série coïncide avec la suivante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n,$$

dont la convergence est donc démontrée.

En se rappelant l'inégalité

$$\int_0^h e^{-uz-\frac{\pi^2 n^2}{z}} z^{\frac{s-3}{2}} dz < \mathcal{A}_n,$$

on démontre facilement que l'équation (γ) subsiste, d'où il suit que *l'équation* (9) *est exacte* quand on suppose u positif.

L'intégrale $\mathcal{A}_n$ définie par la formule (10) est une fonction transcendante entière de la variable complexe s, et, la série dans le second membre de l'équation (9) étant absolument convergente pour chaque valeur réelle ou imaginaire de s, on voit que la différence

$$(9^a) \qquad \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\tfrac{1}{2}s\right) \mathfrak{F}(x, s, u) - \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right) u^{-\frac{s-1}{2}}$$

est une *fonction transcendante entière* de la variable s, résultat remar-

quable, puisque la fonction $\mathfrak{F}$ n'était définie que pour les valeurs de s dont la partie réelle est supérieure à l'unité.

Je me borne maintenant au cas particulier où la quantité u est zéro. En remplaçant, dans l'intégrale (10), z par $\frac{1}{z}$, il vient

$$(10^a) \qquad \mathcal{A}_n = \int_0^\infty e^{-\frac{u}{z}-\pi^2 n^2 z} z^{-\frac{s+1}{2}} dz.$$

Si la quantité s est inférieure à l'unité ou si elle est négative, cette intégrale ne cessera pas d'exister même quand on y suppose $u = 0$; elle deviendra

$$\mathcal{A}'_n = \int_0^\infty e^{-\pi^2 n^2 z} z^{-\frac{s+1}{2}} dz = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)(\pi n)^{s-1}.$$

Je vais montrer qu'on a

$$(a') \qquad \lim_{u=0} \mathcal{A}_n = \mathcal{A}'_n.$$

Nous avons, en effet,

$$\mathcal{A}_n - \mathcal{A}'_n = \int_0^\delta \left(e^{-\frac{u}{z}} - 1\right) e^{-\pi^2 n^2 z} z^{-\frac{s+1}{2}} dz + \int_\delta^\infty \left(e^{-\frac{u}{z}} - 1\right) e^{-\pi^2 n^2 z} z^{-\frac{s+1}{2}} dz,$$

δ étant une quantité positive. Quand u devient infiniment petit, la seconde intégrale, dans le second membre, le devient aussi; en prenant δ suffisamment petit, la première intégrale sera moindre qu'une quantité donnée, quelle que soit la valeur de $u > 0$; donc la différence $|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}'_n|$ sera moindre qu'une quantité donnée arbitrairement pour chaque valeur positive de u moindre qu'une limite convenablement choisie. C'est ce qu'exprime la formule (a').

Quand on suppose la quantité s négative, la série

$$\sum_{n=1}^\infty \mathcal{A}'_n = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \pi^{s-1} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{1-s}}$$

est évidemment convergente, et je dis que l'on a

$$\lim_{u=0} \sum_{n=1}^\infty \mathcal{A}_n = \sum_{n=1}^\infty \mathcal{A}'_n.$$

sera négative (positive); d'où il suit que l'on a

$$D_x \frac{1}{|x+m|^s} = -s \frac{\operatorname{sgn}(x+m)}{|x+m|^{s+1}},$$

en représentant, avec mon illustre maître, M. Kronecker, par $\operatorname{sgn} a$ (signe de a) l'unité affectée du même signe que la quantité a.

Donc nous avons

$$(1^b) \qquad D_x \Phi(x,s) = -s \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x+m)}{|x+m|^{s+1}};$$

d'où il suit, au moyen de l'équation (1^a),

$$s\Phi(x,s+1) - D_x\Phi(x,s) = s \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1+\operatorname{sgn}(x+m)}{|x+m|^{s+1}}$$

ou, en désignant par $E(x)$ un entier, tel que la différence $x - E(x)$ soit positive et moindre que l'unité,

$$s\Phi(x,s+1) - D_x\Phi(x,s) = 2s \sum_{m=-E(x)}^{\infty} \frac{1}{|x+m|^{s+1}}.$$

Posant donc

$$(13) \qquad \mathfrak{R}(x,s) = \sum_{m=-E(x)}^{\infty} \frac{1}{|x+m|^s},$$

nous aurons

$$s\Phi(x,s+1) - D_x\Phi(x,s) = 2s\,\mathfrak{R}(x,s+1).$$

En substituant, dans cette équation, les valeurs

$$\Phi(x,s+1) = \frac{2\Gamma\left(\frac{-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \pi^{s+\frac{1}{2}} \mathfrak{k}(x,-s),$$

$$D_x\Phi(x,s) = \frac{2\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \pi^{s-\frac{1}{2}} D_x \mathfrak{k}(x,1-s)$$

tirées de la formule (12) et en se rappelant la relation

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = \frac{2^s\sqrt{\pi}}{2\cos\frac{\pi s}{2}} \frac{1}{\Gamma(s)}$$

ar le changement de s en $s+1$, on trouve

$$\ldots^{s+1}\left[\frac{\mathfrak{F}(x, -s)}{\sin\frac{\pi s}{2}} + \frac{1}{2\pi}\,\frac{D_x \mathfrak{F}(x, 1-s)}{\cos\frac{\pi s}{2}}\right]$$

des théorèmes connus

$$\ldots s) = \frac{\pi}{\sin \pi s},$$

positifs, la for-

à M. Hurwitz

-dire les relations

$$\ldots) f(s \mid r, \beta),$$

sera négative (positive); d'où il suit que l'on a

$$D_x \frac{1}{|x+m|^s} = -s \frac{\text{sgn}(x ...}{|x+ ...}$$

en représentant, avec mon illustre maître, M. ...
de a) l'unité affectée du même signe que la q...

Donc nous avons

$$(1^b) \qquad D_x \Phi(x, s) = -s \sum_{m=-\infty}^{\infty} ...$$

d'où il suit, au moyen de l'équation (1^a)

$$s\Phi(x, s+1) - D_x \Phi(x, s) ...$$

ou, en désignant par $E(x)$ un entier ...
sitive et moindre que l'unité,

$$s\Phi(x, s+1) - D_x \Phi ...$$

Posant donc

(3) $\mathfrak{R}(x, ...$

nous aurons

$$s\Phi(x, s- ...$$

En substituant, dans ...

$$\Phi(x, ...$$

I

tires de la fo...

SUR UN

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE,

PAR M. ANDOYER.

Au § XI du VIIe Livre des *Leçons sur la Géométrie*, intitulé : *Les systèmes de points d'intersection des courbes non adjointes avec la courbe fondamentale; extension du problème de l'inversion*, Clebsch s'occupe, en particulier, des systèmes de coniques qui touchent en quatre points une quartique à un seul point double. Le nombre de ces systèmes, qui est 32, se réduit, d'après Clebsch, à 31 si l'on considère seulement les systèmes de coniques proprement dites; le trente-deuxième système est composé de toutes les droites du plan, comptées chacune deux fois. Parmi ces trente et un systèmes, on en distingue aisément trente qui contiennent chacun quatre couples de tangentes doubles, chacune des seize tangentes appartenant à quinze de ces systèmes. Quant au trente et unième système, Clebsch dit simplement qu'il contient les six tangentes à la courbe issues du point double, comptées chacune deux fois.

Dans un Mémoire intitulé : *Recherches géométriques sur les quartiques, en particulier au point de vue des coniques de contact*, et inséré au tome LXXXVII des *Sitzungsberichte de l'Académie des Sciences de Vienne*, M. Ameseder, après avoir rappelé que M. Brill a obtenu, dans les *Mathematische Annalen*, le même résultat que Clebsch, et par la même voie, ajoute qu'il est impossible que le trente et unième système, dont il a été question plus haut, soit composé de coniques proprement dites, mais qu'il est, selon toute apparence, identique avec le trente-deuxième, c'est-à-dire qu'il comprend toutes les droites du plan, comptées chacune deux fois.

Je me propose de faire voir sommairement que ce système se compose

non pas de toutes les droites du plan, comptées deux fois, mais des droites passant par le point double, comptées chacune deux fois.

Appelons, avec Clebsch, u_1 et u_2 les deux intégrales normales de première espèce appartenant à la courbe considérée; leurs périodes sont représentées par le Tableau

$$\begin{array}{cccc} 2i\pi & 0 & a_{11} & a_{21} \\ 0 & 2i\pi & a_{12} & a_{22}. \end{array}$$

Appelons aussi u_3 l'intégrale normale de troisième espèce, dont les deux points de discontinuité sont confondus avec le point double de la courbe; ses périodes correspondant aux précédentes seront o, o, A_1, A_2; elle a, en outre, la période $2i\pi$. Soient α_1, α_2, α_3, α_4 les points de contact d'une conique de contact particulière, et x_1, x_2, x_3, x_4 ceux d'une conique de contact quelconque; on a, pour définir ces derniers points, les relations

$$\sum_{i=1}^{i=4} \int_{\alpha_i}^{x_i} du_1 \equiv \tfrac{1}{2}(2i\pi m_1 + q_1 a_{11} + q_2 a_{21}),$$

$$\sum_{i=1}^{i=4} \int_{\alpha_i}^{x_i} du_2 \equiv \tfrac{1}{2}(2i\pi m_2 + q_1 a_{12} + q_2 a_{22}),$$

$$\sum_{i=1}^{i=4} \int_{\alpha_i}^{x_i} du_3 \equiv \tfrac{1}{2}(2i\pi g \;\; + q_1 A_1 \; + q_2 A_2 \,),$$

m_1, m_2, q_1, q_2, g étant des entiers, auxquels il faut donner les valeurs o et 1. Il y a donc 2^5 ou 32 systèmes de coniques de contact. Le trente-deuxième système, composé des droites du plan comptées deux fois, correspond à $m_1 = m_2 = q_1 = q_2 = g = 0$. Le trente et unième correspond à $m_1 = m_2 = g_1 = g_2 = 0$ et $g = 1$, c'est-à-dire aux équations

$$\sum \int_{\alpha_i}^{x_i} du_1 \equiv 0,$$

$$\sum \int_{\alpha_i}^{x_i} du_2 \equiv 0,$$

$$\sum \int_{\alpha_i}^{x_i} du_3 \equiv i\pi.$$

Il est donc clair que, seules, les deux premières de ces équations sont

x_2, x_3, x_4 les points d'intersection de la
plan; mais, si cette droite passe par
points de discontinuité con-
membre de la troisième
considérer comme
droites passant

duit
es de
actéris-
es courbes

ent s'appliquer,
al des courbes de
ifications analogues
es Mémoires sur l'appli-
et sur les courbes planes
ues ou elliptiques d'un para-
al de Crelle.
systèmes de coniques de contact
ues est 13 et non pas 15; on en déduit
les formules de M. Cayley, qu'il y a
point et 51 tangentes à une droite.
ndiqués par Clebsch sont les faisceaux de
ubles et comptées deux fois. De même, pour
ts doubles, le nombre des systèmes des coniques
7; les trois systèmes à supprimer sont les faisceaux
eux fois, ayant pour sommets les points doubles. Ce
eptible d'être traité complètement d'une façon élémen-
s présenter les détails de la démonstration, afin de lever,
l'objection qu'on pourrait faire au raisonnement qui nous a
ous, objection consistant en ce qu'on peut demander de faire
des équations qui définissent le problème, et de montrer qu'ef-
ent ces équations admettent pour solutions nécessaires les deux
s du paramètre qui correspondent au point double.

Considérons une quartique à trois points doubles, définie, pour plus de

[illegible], par les équations

$$[illegible]$$

et traitons le problème comme dans le cas général. Les trois intégrales de troisième espèce, dont les points de discontinuité sont confondus avec un point double, sont respectivement

$$[illegible]$$

[illegible] équations du problème sont, en désignant par $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ les valeurs [illegible] qui correspondent aux points de contact d'une conique particulière [illegible] à la question [illegible] celles qui répondent aux points de contact d'une [illegible] les coniques [illegible],

$$\sum [illegible]$$

$$\sum [illegible]$$

$$\sum [illegible]$$

[illegible] on peut les écrire

$$[illegible]$$

D'ailleurs, si $\theta_1, \ldots$ [illegible] correspondent aux points d'intersection avec la courbe d'une droite quelconque, hypothèse que nous avons le droit de faire, on constate facilement, en mettant les valeurs de x, y, z dans l'équa-

n a

$$\ldots\theta_4 = -1,$$

$$\frac{\theta_4+1}{-1} = -1,$$

$$-1.$$

lleurs pu trouver direc-

aux droites quelconques du
, si l'on prend un signe + et
droites passant par les points

$$S_3 = \Sigma t_1 t_2 t_3, \qquad S_4 = t_1 t_2 t_3 t_4$$

$$1,$$

$$\frac{S_4 + S_2 - S_1 + 1}{S_3 + S_2 + S_1 + 1} = \mp 1,$$

$$\frac{S_4 - iS_3 - S_2 + iS_1 + 1}{S_4 + iS_3 - S_2 - iS_1 + 1} = \mp 1.$$

la combinaison —, —, +; on a

$$S_4 = -1,$$

$$S_2 = 0,$$

$$S_1 - S_3 = 0.$$

L'équation dont les racines sont t_1, t_2, t_3, t_4 est donc

$$t^4 + \lambda t^3 + \lambda t - 1 = 0 = (t^2 + 1)(t^2 + \lambda t - 1),$$

équation qui admet les deux racines $\pm i$, qui correspondent à l'un des points doubles. Il reste à vérifier, ce qui n'offre aucune difficulté, que les deux points qui correspondent aux deux autres racines sont en ligne droite avec ce point double. Il en est de même évidemment pour les combinaisons analogues de signes.

Les systèmes de coniques proprement dites ne correspondent donc qu'aux combinaisons où figure au plus un signe $-$.

SUR LE CERCLE

CONSIDÉRÉ

COMME ÉLÉMENT GÉNÉRATEUR DE L'ESPACE,

PAR M. EUGÈNE COSSERAT,

Aide-Astronome à l'Observatoire de Toulouse,
Chargé d'un Cours complémentaire à la Faculté des Sciences de Toulouse.

INTRODUCTION.

Les recherches sur l'espace cerclé semblent commencer avec le Mémoire de M. A. Enneper ([1]), dans lequel on trouve une classification complète des surfaces engendrées par le mouvement d'un cercle. M. Enneper, considérant la situation relative de deux cercles infiniment voisins, parvient à séparer les surfaces cerclées en plusieurs classes :

Les surfaces de la première classe sont celles pour lesquelles deux cercles infiniment voisins n'ont, en général, aucun point commun.

Celles de la deuxième classe sont celles pour lesquelles chaque génératrice a un point commun unique avec la génératrice infiniment voisine.

M. Enneper en donne la génération suivante : Sur une surface gauche, considérons deux courbes Γ, Γ_1, dont la seconde soit une trajectoire orthogonale des génératrices, et soient π, π_1 deux points de Γ, Γ_1, situés sur la même génératrice; dans le plan mené par le point π et par la tangente à la courbe Γ_1 en π_1, décrivons, de π comme centre avec $\pi\pi_1$ pour rayon, un cercle; la surface engendrée par ce cercle est la surface la plus générale de la deuxième classe. On peut dire que le lieu du point commun à deux génératrices infiniment voisines forme sur la surface une courbe à laquelle le cercle mobile reste constamment tangent.

([1]) A. ENNEPER, *Die cyklischen Flächen (Zeitschrift für Mathematik und Physik*, p. 393; 1869).

Les surfaces cerclées de la troisième classe sont celles pour lesquelles deux génératrices infiniment voisines ont constamment deux points communs; la surface est l'enveloppe d'une sphère dont le centre décrit une courbe.

Si les deux points communs aux génératrices infiniment voisines sont constamment confondus, on a deux nouvelles classes de surfaces :

Ou bien le cercle mobile reste constamment osculateur à une ligne à double courbure : ce cas correspond aux surfaces de la quatrième classe;

Ou bien le cercle mobile reste tangent à une courbe et son plan passe par la tangente à la courbe décrite par son centre : ce cas correspond aux surfaces de la cinquième classe.

M. Enneper étudie, dans le même Mémoire, les surfaces cerclées minima déjà considérées par Riemann, et introduit la notion des lignes de striction des surfaces cerclées. Sur chaque génératrice existent quatre points où la génératrice est à une distance maxima ou minima de la génératrice infiniment voisine; les courbes déterminées sur la surface par ces points sont les lignes de striction; l'équation qui les détermine est analogue à celle qui permet d'obtenir la ligne de striction sur les surfaces gauches.

L'étude des surfaces cerclées a été reprise par Laguerre (1), en introduisant une notion importante relative aux cercles et qui est due à Chasles. Étant donné un cercle dans l'espace, par ce cercle, on peut toujours faire passer deux sphères de rayon nul. M. Darboux a donné aux centres de ces sphères le nom de *foyers* du cercle (2). Un cercle est déterminé par ses deux foyers. Laguerre emploie la notation (f, f') pour représenter le cercle dont les deux foyers sont f et f', et donne la génération suivante des surfaces cerclées. Considérons une courbe gauche quelconque C et une surface réglée V, telle que chacune de ses génératrices rencontre cette courbe en deux points f_i, f'_i. Soient $f_1 f'_1, f_2 f'_2, \ldots$ les génératrices de cette surface; les cercles $(f_1, f'_1), (f_2, f'_2), \ldots$ engendreront une autre surface, que l'on dira dérivée de la courbe C. D'une même courbe donnée, on peut ainsi déduire une infinité de surfaces cerclées; chacune des surfaces dérivées correspond à un mode de groupement des points de la courbe C, défini par la surface V. Lorsque la courbe C est plane, les droites $f_i f'_i$ enveloppent une

---

(1) LAGUERRE, *Mémoire sur l'emploi des imaginaires dans la Géométrie de l'espace* (*Nouvelles Annales de Mathématiques;* 1872).

(2) DARBOUX, *Sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de sphères dans le plan et dans l'espace* (*Journal de Liouville,* 2e série, t. I; 1872). — *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques,* p. 25.

courbe qui peut servir à définir le groupement des points. Réciproquement, étant donnée une surface cerclée quelconque, on peut toujours la considérer comme une surface dérivée d'une courbe gauche; cette courbe est le lieu des foyers des génératrices circulaires de la surface, et la surface réglée V qui détermine le mode de groupement des points de la courbe est le lieu des axes des différents cercles. Nous verrons que la courbe C est une focale d'une quelconque des surfaces dérivées.

Les surfaces cerclées ont été considérées de nouveau par M. Demartres qui a appliqué à l'étude de leurs propriétés infinitésimales la méthode cinématique ([1]). M. Demartres a retrouvé les principaux résultats de M. Enneper et en a ajouté beaucoup d'autres, parmi lesquels ce théorème fondamental : *Chaque point pris sur l'axe d'une génératrice circulaire* G *est le centre d'une sphère tangente à la surface en deux points de* G, *et toutes les cordes de contact sont concourantes.*

Les cercles de l'espace dépendent de six paramètres; on peut constituer des systèmes indéterminés de cercles, de même qu'on l'a fait pour la droite. Les premières recherches dans cette voie sont dues à M. Cyparissos Stephanos, qui a donné sans démonstration des propriétés des systèmes linéaires doublement indéterminés, ainsi que du pentacycle ou système de cinq cercles qui vérifient six équations linéaires ([2]).

La voie à suivre dans l'étude des systèmes linéaires a été indiquée par M. Kœnigs ([3]) qui, après avoir établi le théorème fondamental des recherches de M. Stephanos, a donné une proposition remarquable relative au système linéaire quintuplement indéterminé et découvert les invariants de ce système.

Un cercle étant déterminé par ses deux foyers, on voit que la géométrie du cercle dans l'espace n'est autre que la géométrie de l'ensemble de deux points. On est ainsi amené, au début de l'étude du cercle, à considérer comme élément de l'espace le système de deux points auquel nous donnons le nom de *double point*.

([1]) DEMARTRES, *Sur les surfaces à génératrice circulaire* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. II, p. 123).

([2]) CYPARISSOS STEPHANOS, *Sur une configuration remarquable de cercles dans l'espace* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XCIII, p. 578). — *Sur une configuration de quinze cercles et sur les congruences linéaires de cercles dans l'espace* (*Comptes rendus*, t. XCIII, p. 633).

([3]) G. KŒNIGS, *Contributions à la théorie du cercle dans l'espace* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. II).

La première Partie de ce travail a rapport à l'étude des propriétés infinitésimales du premier ordre de l'espace cerclé. Nous avons cherché à construire une théorie analogue à celle donnée par M. Kœnigs dans le cas de l'espace réglé, et fondée sur l'existence de la forme fondamentale [1].

Le théorème déjà signalé, et dû à M. Demartres, conduit à une proposition qui peut être considérée comme l'analogue du théorème de Chasles sur la distribution des plans tangents à une surface gauche le long d'une génératrice et qui amène à la substitution de l'usage des corrélations anharmoniques à celui du cercle infiniment voisin.

La rencontre de deux cercles infiniment voisins s'exprime par l'évanouissement d'une forme biquadratique des différentielles des coordonnées; la considération de cette forme, jointe à l'étude des corrélations anharmoniques, conduit à la classification des surfaces cerclées, due à M. Enneper et fondée sur la situation relative de deux cercles infiniment voisins.

A cette forme biquadratique sont associées les théories des systèmes adjoints et des surfaces de singularités. Nous développons ces théories dans le cas général où l'on adopte comme élément générateur de l'espace une courbe dépendant de $(n+1)$ paramètres; la rencontre de deux éléments infiniment voisins s'exprime alors par l'évanouissement d'une forme des différentielles des $(n+1)$ paramètres qui est intimement liée aux propriétés infinitésimales des systèmes d'éléments, que nous désignons par les symboles S_0, S_1, S_2, ..., S_n, l'indice indiquant l'indétermination du système.

M. Kœnigs, qui, le premier, a considéré cette forme et lui a donné le nom de *forme fondamentale*, a prouvé que si le nombre des paramètres est supérieur à quatre, elle admet non plus une forme adjointe, comme dans le cas de l'espace réglé, mais un système adjoint composé de $(n-2)$ formes, dont l'emploi permet de constituer, à l'égard du système S_n, une théorie analogue à celle développée par M. Klein dans le cas du complexe de droites, par l'introduction de la forme adjointe.

Nous montrons qu'à chacun des systèmes S_3, S_4, ..., S_{n-1} on peut, de même, faire correspondre un système adjoint de la forme fondamentale dont l'existence est intimement liée aux propriétés infinitésimales du système auquel il est associé.

Ces systèmes adjoints conduisent naturellement à la généralisation de la

---

[1] G. Kœnigs, *Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé* (*Annales de l'École Normale*, 1882).

notion de surface de singularités du complexe de droites; la surface focale de la congruence et la surface sur laquelle sont réparties les courbes de S, apparaissent comme des surfaces de singularités, et forment ainsi les derniers éléments d'une suite de surfaces qui présentent entre elles une liaison remarquable. Les théorèmes qui lient entre elles les surfaces de singularités de trois systèmes consécutifs peuvent être très utiles dans la recherche des surfaces de singularités, ainsi qu'on le voit, plus loin, dans l'étude des systèmes linéaires de cercles. La proposition qui établit un lien entre la surface de singularités du complexe de droites et les cônes du complexe apparaît comme un cas particulier d'une proposition plus générale.

Nous appliquons les résultats obtenus aux différents systèmes de cercles. On trouve, pour les *cyclides de raccordement* des surfaces cerclées, une définition analogue à celle des hyperboloïdes de raccordement des surfaces gauches, en utilisant la génération des cyclides due à M. Casey. A l'égard de la congruence de cercles, nous retrouvons la surface focale, considérée par M. Darboux dans le cas général des congruences de courbes. A propos du système quintuplement indéterminé, nous montrons comment la notion de surface de singularités conduit naturellement au beau théorème que l'on doit à M. Kœnigs [1] et qui est la généralisation de la proposition de M. Klein relative aux complexes de droites; nous établissons également la réciproque de ce théorème, pour le cas du cercle.

Dans la seconde Partie, nous abordons l'étude des systèmes linéaires de cercles.

La théorie des systèmes linéaires de droites peut se déduire, comme on sait, d'un seul théorème. Il existe de même, à l'égard des systèmes linéaires de cercles, un théorème qui peut servir de base à leur théorie. Cette proposition n'est, d'ailleurs, que l'interprétation géométrique d'une propriété de certaines formes bilinéaires. A la recherche des conséquences que l'on peut en déduire, nous associons l'application des propositions développées dans la première Partie.

---

[1] G. Kœnigs, *Sur une classe de formes de différentielles et sur la théorie des systèmes d'éléments* (*Comptes rendus*, t. CIV, p. 673-675, 842-844). — *Acta Mathematica*, t. X, p. 313-338).

PREMIÈRE PARTIE.

PROPRIÉTÉS INFINITÉSIMALES DU PREMIER ORDRE DE L'ESPACE CERCLÉ.

I. — Les corrélations anharmoniques; leur rôle dans les propriétés infinitésimales de l'espace cerclé.

Considérons comme élément de l'espace l'ensemble de deux points auquel nous donnerons le nom de *double point;* la droite joignant les deux points sera la droite du double point.

Appelons *couple* le système formé par l'ensemble d'un double point et d'une sphère menée par ce double point; nous désignerons le double point, formé de l'ensemble des deux points a_1, a_2, par a. Un couple pourra se désigner par la notation (a, α), où a est le double point et α la sphère du couple.

Appelons *couple simple* le système formé par l'ensemble d'un point et d'une sphère menée par ce point; nous désignerons un couple simple par la notation (a, α), où a désigne le point et α la sphère du couple.

Un couple sera dit situé sur un cercle C, ou bien le cercle C sera dit appartenir au couple, si ce cercle est sur la sphère α du couple et passe par le double point a de ce couple. Les mêmes expressions, employées à l'égard du couple simple, auront une signification semblable.

Lorsque nous considérerons sur un même cercle plusieurs doubles points, nous les concevrons en général de la manière suivante : choisissons dans le plan du cercle un point P et menons par ce point une sécante; elle coupe le cercle suivant un double point; en faisant tourner la sécante autour de P, nous aurons différents doubles points. On peut ainsi envisager le cercle comme engendré par un double point, la droite de ce double point passant par un point fixe P.

Étant donnés quatre doubles points ainsi déterminés a, b, c, d, leur rapport anharmonique (a, b, c, d) sera le rapport anharmonique des quatre droites de ces doubles points.

Quatre couples (a, α), (b, β), (c, γ), (d, δ) étant situés sur un même cercle, on dira que ces couples sont en *relation anharmonique,* s'il y a

égalité entre les rapports anharmoniques.

$$(a, b, c, d) \quad \text{et} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

des quatre doubles points a, b, c, d et des quatre sphères α, β, γ, δ.

Considérons un cercle et supposons donné le point P qui détermine la description du cercle par le mouvement d'un double point. Pour définir un couple sur ce cercle, on doit alors envisager deux coordonnées z et u, définissant, l'une le double point, et l'autre la sphère. Un couple sur un cercle donné dépend alors de deux conditions; une équation entre z et u assujettit le couple à une condition; les couples correspondant à un point P et satisfaisant ainsi à une même condition forment une *corrélation*. Si l'on remarque qu'un couple d'une corrélation est défini par une nouvelle condition, on peut dire qu'une corrélation est une correspondance entre les doubles points d'un cercle C relatifs à un point P et les sphères passant par ce cercle. Si m doubles points correspondent à une sphère et si μ sphères correspondent à un double point, on dit que la corrélation est du $m^{\text{ième}}$ ordre et de la $\mu^{\text{ième}}$ classe, et l'on peut la désigner par le symbole Γ_μ^m.

Rappelons enfin le théorème suivant, conséquence immédiate du principe de correspondance :

Quatre couples d'une même corrélation Γ_1^1, *du premier ordre et de la première classe, sont en relation anharmonique, et réciproquement, les couples qui, situés sur un cercle, sont en relation anharmonique avec trois couples fixes situés sur ce cercle, engendrent une corrélation* Γ_1^1 *du premier ordre et de la première classe.*

C'est pour cette raison qu'on donne à la corrélation du premier ordre et de la première classe le nom de *corrélation anharmonique*.

Deux corrélations Γ_μ^m et $\Gamma_{\mu'}^{m'}$, correspondant à un même point P, ont en commun un nombre de couples égal à

$$m\mu' + m'\mu,$$

et, en particulier, deux corrélations anharmoniques correspondant à un même point P ont en commun deux couples (a, α), (b, β).

Arrivons au rôle des corrélations anharmoniques dans les propriétés infinitésimales de l'espace cerclé.

Supposons qu'un cercle donné C dans l'espace appartienne à une surface cerclée. Pour étudier la surface autour du cercle, prenons pour plan des xy

le plan du cercle, les coordonnées étant rectangulaires. Les équations de la génératrice de la surface cerclée seront

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + c = 0;$$

a, b, c, α, β, γ sont des fonctions d'une même variable λ, les fonctions α, β, γ s'annulant simultanément avec la variable. Le développement en série donne

$$\alpha = \alpha_1\lambda + \alpha'_1\lambda^2 + \ldots, \qquad a = a_0 + a_1\lambda + a'_1\lambda^2 + \ldots,$$
$$\beta = \beta_1\lambda + \beta'_1\lambda^2 + \ldots, \qquad b = b_0 + b_1\lambda + b'_1\lambda^2 + \ldots,$$
$$\gamma = \gamma_1\lambda + \gamma'_1\lambda^2 + \ldots, \qquad c = c_0 + c_1\lambda + c'_1\lambda^2 + \ldots.$$

Cherchons les points $(x, y, 0)$, où la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 + a_0 x + b_0 y + c_0 = \mu z,$$

qui passe par le cercle C, touche la surface.

Posons

$$M = a_1 x + b_1 y + c_1,$$
$$Q = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1.$$

Les coefficients directeurs de la normale à la surface au point $(x, y, 0)$ sont proportionnels à

$$2x + a_0, \quad 2y + b_0, \quad \frac{M}{Q}.$$

Ceux de la normale à la sphère sont proportionnels à

$$2x + a_0, \quad 2y + b_0, \quad -\mu.$$

Écrivons que ces deux normales sont confondues; il vient

$$M = -\mu Q.$$

Nous retrouvons donc ce théorème, dû à M. Demartres [1] :

Chaque point pris sur l'axe du cercle C *est le centre d'une sphère tangente à la surface cerclée en deux points de* C; *toutes les cordes de contact sont concourantes.*

---

[1] DEMARTRES, *Sur les surfaces à génératrice circulaire* (*Annales de l'École Normale,* 3ᵉ série, t. II, p. 123).

La droite $Q = 0$ est la *caractéristique* AA' de M. Demartres.

La droite $M = 0$ est l'*axe radical* $\alpha\alpha'$.

Les deux points α, α' du cercle situés sur $\alpha\alpha'$ correspondent à la sphère, qui admet le cercle comme grand cercle; les deux points A, A' situés sur AA' correspondent au plan du cercle; en ces deux points A, A', la normale est perpendiculaire au plan du cercle; donc :

Il existe sur chaque génératrice deux points où elle est tangente à une ligne asymptotique de la surface, et ces deux points sont situés sur la caractéristique.

Remarquons également cette proposition, énoncée aussi par M. Demartres : *La courbe lieu des foyers des cercles qui engendrent la surface est une focale de cette surface.*

Plaçons-nous dans le cas général où $Q = 0$, $M = 0$ sont deux droites distinctes; P étant leur point d'intersection, concevons le cercle comme décrit par un double point dont la droite passe par P. On peut alors énoncer le théorème suivant, qui constitue, à l'égard des surfaces cerclées, le théorème analogue au théorème de Chasles sur la distribution des plans tangents à une surface gauche le long d'une génératrice :

Les couples formés par un double point d'une surface cerclée et la sphère tangente en ce double point, et qui sont situés sur une même génératrice circulaire, engendrent une corrélation anharmonique.

Considérons une autre surface cerclée passant par le cercle C; elle donnera lieu à d'autres développements et à une autre corrélation anharmonique qui sera, en général, relative à un point P_1 différent de P. Les droites des doubles points qui correspondent à une même sphère forment des faisceaux homographiques de sommets P et P_1; par conséquent :

Deux surfaces cerclées passant par un même cercle sont, en général, tangentes en quatre points de ce cercle.

Supposons que P et P_1 soient confondus, c'est-à-dire supposons que les déterminants compris dans la matrice

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

soient proportionnels aux déterminants analogues, en sorte qu'on ait

$$\frac{\alpha_1 b_1 - a_1 \beta_1}{\alpha_2 b_2 - a_2 \beta_2} = \frac{\alpha_1 c_1 - a_1 \gamma_1}{\alpha_2 c_2 - a_2 \gamma_2} = \frac{\beta_1 c_1 - b_1 \gamma_1}{\beta_2 c_2 - b_2 \gamma_2};$$

les couples communs aux deux corrélations correspondant au même point P seront les couples de raccordement des deux surfaces.

Si, de plus, tous les déterminants compris dans la matrice

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ a_2 & b_2 & \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

sont nuls, les deux corrélations coïncident; les deux surfaces cerclées sont tangentes tout le long du cercle C.

Réciproquement, si deux surfaces cerclées sont tangentes le long du cercle C, les points P, P_1, qui leur correspondent, sont confondus et, de plus, les deux corrélations coïncident.

Ceci posé, on aperçoit immédiatement que les conditions qui correspondent à ce cas particulier peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$a_2 = \mu a_1, \qquad b_2 = \mu b_1, \qquad c_2 = \mu c_1, \qquad \alpha_2 = \mu \alpha_1, \qquad \beta_2 = \mu \beta_1, \qquad \gamma_2 = \mu \gamma_1.$$

On a, par suite, la conclusion suivante :

Considérons le cercle C, qui a pour équations

$$z = 0,$$
$$x^2 + y^2 + a_0 x + b_0 y + c_0 = 0.$$

Si on laisse a_0, b_0, c_0 et a_1, b_1, c_1, α_1, β_1, γ_1 invariables, et que l'on attribue aux constantes $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \beta'_1, \beta'_2, \ldots, \gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, a'_1, a'_2, \ldots, b'_1, b'_2, \ldots, c'_1, c'_2, \ldots$ telles valeurs que l'on voudra, les développements suivants, où λ est une variable indépendante, conviendront à toutes les surfaces cerclées tangentes entre elles tout le long du cercle C.

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 \lambda + \alpha'_1 \lambda^2 + \ldots, & a &= a_0 + a_1 \lambda + a'_1 \lambda^2 + \ldots, \\ \beta &= \beta_1 \lambda + \beta'_1 \lambda^2 + \ldots, & b &= b_0 + b_1 \lambda + b'_1 \lambda^2 + \ldots, \\ \gamma &= \gamma_1 \lambda + \gamma'_1 \lambda^2 + \ldots; & c &= c_0 + c_1 \lambda + c'_1 \lambda^2 + \ldots. \end{aligned}$$

Or attribuons à λ une valeur infiniment petite ε; en négligeant les termes du second ordre, on a

$$\alpha = \alpha_1 \varepsilon, \quad \beta = \beta_1 \varepsilon, \quad \gamma = \gamma_1 \varepsilon, \quad a = a_0 + a_1 \varepsilon, \quad b = b_0 + b_1 \varepsilon, \quad c = c_0 + c_1 \varepsilon.$$

...ondant est infiniment voisin du cercle C, et, comme il ... $z'_1, \ldots,$ on en conclut qu'il est commun à toutes les sur... qui définissent la même corrélation sur le cercle C; c'est ce ...primer en disant qu'une corrélation anharmonique sur un ...respond à un cercle de l'espace infiniment voisin du cercle C.

...qu'un point de l'espace infiniment voisin d'un point fixe définit ... issue de ce point, et que, inversement, la considération de lie ... on peut souvent être substituée à celle du point voisin, de avec ... l'espace cerclé, un cercle infiniment voisin d'un cercle définit dans ... corrélation anharmonique dont l'emploi peut remplacer celui lui une ... cercle infiniment voisin dans un grand nombre de questions.

Arrivons à la représentation analytique des cercles et des corrélations anharmoniques.

Les cercles de l'espace forment un système sextuplement indéterminé; un cercle dépend de six paramètres

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_6;$$

nous désignerons ce cercle par la notation (u).

Un cercle infiniment voisin du cercle (u) a pour coordonnées

$$u_i + \Delta u_i,$$

ou, en négligeant les termes du second ordre,

$$u_i + du_i.$$

On peut le désigner par le symbole $(u + du)$.

Chaque système de valeurs des rapports

$$du_1 : du_2 : \ldots : du_6$$

définit un cercle infiniment voisin du cercle (u) et, par suite, une corrélation anharmonique sur ce cercle. Si $t_1, t_2, \ldots, t_6$ sont des quantités *finies* proportionnelles à $du_1, du_2, \ldots, du_6$, on pourra dire que les quantités t sont les coordonnées homogènes d'une corrélation anharmonique sur le cercle (u).

Les corrélations anharmoniques sur un cercle donné (u) forment une *quintuple* infinité. Une équation entre les coordonnées d'une corrélation *représente* une série quatre fois indéterminée de corrélations; deux équa-

tions représentent une série trois fois indéterminée, etc. Si toutes les équations sont linéaires, on a des systèmes linéaires de corrélations que nous représenterons par les symboles M_4, M_3, M_2, M_1, M_0, l'indice indiquant l'indétermination du système.

Revenons à la corrélation sur le cercle C, défini par les équations

$$z = 0,$$
$$x^2 + y^2 + a_0 x + b_0 y + c_0 = 0,$$

afin d'étudier tous les cas qui peuvent se présenter.

Étant donnée la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 + a_0 x + b_0 y + c_0 = \mu z,$$

les points de contact avec la surface s'obtiennent, ainsi qu'on l'a vu, en coupant le cercle par la droite qui a pour équation dans le plan des xy

$$M = -\mu Q,$$

en posant

$$M = a_1 x + b_1 y + c_1,$$
$$Q = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1.$$

Supposons d'abord que les deux droites $M = 0$, $Q = 0$ soient distinctes : elles se couperont en un point P.

Le cas général est celui où le point P est quelconque.

Si le point P est sur le cercle, on dira que la corrélation est *singulière*.

Le point P, considéré comme double point (la droite du double point étant la tangente au cercle), et la sphère correspondante constituent le *couple singulier*.

Supposons maintenant que tous les déterminants déduits du Tableau

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

soient nuls.

Dans ce cas, les couples formés par les sphères tangentes et les doubles points de contact se composent, ou bien d'une sphère fixe et d'un double point quelconque, ou bien d'une sphère quelconque et d'un double point fixe. Si ce dernier double point est formé de deux points distincts, on peut dire que la corrélation est *doublement singulière;* s'il est formé de deux points confondus, la corrélation sera *triplement singulière*.

II. — La forme fondamentale et les systèmes adjoints.

Lorsqu'on adopte comme élément générateur de l'espace une courbe dépendant de $n+1$ paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$, la rencontre de deux éléments infiniment voisins s'exprime par l'évanouissement d'une forme $M(u \mid du)$ des $(n+1)$ différentielles des $(n+1)$ paramètres dont dépend l'élément. Cette forme joue un rôle fondamental dans la géométrie des systèmes de courbes que l'on peut former avec l'élément considéré.

M. Kœnigs, à qui l'on doit la notion de la *forme fondamentale* $M(u \mid du)$, a montré que, si le nombre des paramètres est supérieur à quatre, cette forme fondamentale présente des particularités caractéristiques (¹) : l'une de ces particularités consiste dans l'existence d'un système adjoint composé de $(n-2)$ formes. Il nous est nécessaire de rappeler comment M. Kœnigs établit ce point.

Supposons les équations de l'élément considéré mises sous la forme

$$x = f(z, u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}) = f(z \mid u),$$
$$y = \varphi(z \mid u).$$

Convenons d'une façon générale de la notation suivante; θ étant une fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$, nous poserons

$$\boxed{\theta, t} = \frac{\partial\theta}{\partial u_1} t_1 + \frac{\partial\theta}{\partial u_2} t_2 + \ldots + \frac{\partial\theta}{\partial u_{n+1}} t_{n+1}.$$

Si les courbes (u) et $(u+du)$ se coupent au point (x, y, z), on a

$$\boxed{f, du} = 0,$$
$$\boxed{\varphi, du} = 0.$$

En éliminant z entre ces deux équations, on trouve une forme homogène des différentielles du, dont les coefficients dépendent des u. Désignons par $M(u \mid du)$ cette forme qui n'est définie qu'à un facteur près, indépendant des différentielles. Au lieu des du, introduisons des quantités finies t_1,

(¹) G. Kœnigs, *Sur une classe de formes de différentielles et sur la théorie des systèmes d'éléments* (*Acta Mathematica*, t. X).

tions représentent une série trois fois indétern
tions sont linéaires, on a des systèmes linéa
représenterons par les symboles M_1, M_2, M
l'indétermination du système.

Revenons à la corrélation sur le cercle C.

$$z = 0,$$

$$x^2 + y^2 + a_0 x + b$$

afin d'étudier tous les cas qui peuvent s

Étant donnée la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 + a_0$$

les points de contact avec la surfa
coupant le cercle par la droite qui

en posant

M

Q

Supposons d'abord que les
elles se couperont en un poi

Le cas général est celui o

Si le point P est sur le c

Le point P, considéré
étant la tangente au cer
couple singulier.

Supposons maintena

soient nuls.

Dans ce cas, les
points de contact
point quelconque.
fixe. Si ce dernie
dire que la corr
points confond

la considération
és u comme con-
nes d'un point d'un
les t définit un espace
face; si l'équation est
ons que l'on peut appeler

ons (A), en regardant les u

$= 0,$

$= 0;$

$= 0.$

le contact de l'espace linéaire à

$= 0$

...ons

$$\frac{T^1_{n+1}}{\ldots + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u_{n+1}}},$$

...entre les quantités T^1, dont ...crirons

$$\ldots, \quad \mathfrak{M}_{n-2}(u \mid T^1) = 0.$$

...s $(n-2)$ équations est le système

... de ce système adjoint dans l'étude du ...e relation entre les $(n+1)$ paramètres ...s d'ailleurs plus loin.

...ent intérêt à attacher au système de courbes ...u_1, u_2, ..., u_{n+1} un système adjoint qui pourra ...qui sera composé de $(n-k-1)$ formes.

...contact d'un espace linéaire à $(n-k)$ dimensions ...$) = 0$, nous avons à éliminer z, λ, μ_1, μ_2, ..., μ_k

$$\frac{\mu_1 T^1_1 + \ldots + \mu_k T^k_1}{\frac{\partial f}{\partial u_1} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}} = \frac{\mu_1 T^1_2 + \mu_2 T^2_2 + \ldots + \mu_k T^k_2}{\frac{\partial f}{\partial u_2} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}} = \ldots$$

$$= \frac{\mu_1 T^1_{n+1} + \ldots + \mu_k T^k_{n+1}}{\frac{\partial f}{\partial u_{n+1}} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u_{n+1}}},$$

...obtenons $(n-k-1)$ équations homogènes entre les quantités ..., T^k, que nous écrirons

$$\mathfrak{M}_1(u \mid T^1, T^2, \ldots, T^k) = 0, \quad \ldots, \quad \mathfrak{M}_{n-k-1}(u \mid T^1, T^2, \ldots, T^k) = 0.$$

...e système des premiers membres de ces équations est le système adjoint de $k^{\text{ième}}$ espèce, composé de $(n-k-1)$ formes.

Considérons le cas particulier de l'espace cerclé.

Si nous prenons pour coordonnées du cercle les coefficients a, b, c, α, β, γ dans les équations

$$\alpha x + \beta y + \gamma - z = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + c = 0$$

$t_2, \ldots, t_{n+1}$ et considérons la forme

$$M(u \mid t),$$

qui provient de l'élimination de z entre les équations

$$(A) \qquad \begin{cases} \boxed{f, t} = 0, \\ \boxed{\varphi, t} = 0. \end{cases}$$

Pour interpréter ces équations, M. Kœnigs fait usage de la considération des espaces à plusieurs dimensions. Regardons les quantités u comme constantes, et les t comme les coordonnées linéaires homogènes d'un point d'un espace à n dimensions. Une équation homogène entre les t définit un espace à $(n-1)$ dimensions que l'on peut appeler une *surface;* si l'équation est linéaire, on a un espace linéaire à $(n-1)$ dimensions que l'on peut appeler un *plan*.

Ceci posé, différentions totalement les équations (A), en regardant les u comme constants, il vient

$$\frac{\partial \boxed{f, t}}{\partial z} dz + \boxed{f, dt} = 0,$$

$$\frac{\partial \boxed{\varphi, t}}{\partial z} dz + \boxed{\varphi, dt} = 0;$$

d'où, en posant

$$-\lambda = \frac{\dfrac{\partial \boxed{f, t}}{\partial z}}{\dfrac{\partial \boxed{\varphi, t}}{\partial z}},$$

on conclut

$$\boxed{f, dt} + \lambda \boxed{\varphi, dt} = 0.$$

Par conséquent, si nous exprimons le contact de l'espace linéaire à $(n-1)$ dimensions

$$T_1^1 t_1 + T_2^1 t_2 + \ldots + T_{n+1}^1 t_{n+1} = 0$$

avec la surface

$$M(u \mid t) = 0,$$

trois formes quadratiques

$$N_1(du), \quad N_2(du), \quad N_3(du).$$

Si l'on exprime que les deux points de rencontre sont confondus, on a une nouvelle condition

$$P(du) = 0;$$

la forme $P(du)$ est une forme quadratique des différentielles.

Si l'on se reporte à ce que l'on a dit sur les corrélations et si l'on considère une corrélation anharmonique sur un cercle, on voit que :

1° L'évanouissement de $M(t)$ exprime que la corrélation est singulière; le cercle $(u + du)$, qui la détermine sur le cercle (u), rencontre ce cercle en un point;

2° L'évanouissement simultané de $N_1(t)$, $N_2(t)$, $N_3(t)$, qui équivaut à deux conditions, exprime que la corrélation est doublement singulière; le cercle $(u + du)$, qui la détermine sur le cercle (u), rencontre ce cercle en deux points.

Les cercles (u) et $(u + du)$ ont ainsi un couple commun (a, α). Ce couple est le *couple singulier* de la corrélation doublement singulière.

Tout couple d'une corrélation doublement singulière admet pour un de ses éléments (double point ou sphère) au moins un des éléments du couple singulier.

3° L'évanouissement simultané de $N_1(t)$, $N_2(t)$, $N_3(t)$, $P(t)$ exprime que la corrélation est triplement singulière.

Nous pouvons maintenant compléter ce que nous avons dit précédemment. On est amené à la classification rationnelle des surfaces cerclées due à M. Enneper et fondée sur la situation relative de deux cercles infiniment voisins :

Première classe. — Deux cercles infiniment voisins n'ont, en général, aucun point commun.

Deuxième classe. — Chaque génératrice a un point commun unique avec la génératrice infiniment voisine; les points communs forment sur la surface une courbe à laquelle le cercle mobile reste constamment tangent. Nous donnerons, d'après M. Darboux, le nom d'*arête de rebroussement* de la surface à cette courbe.

Troisième classe. — Deux génératrices infiniment voisines ont constamment deux points communs. Le cercle mobile reste constamment tangent à

deux directrices curvilignes; chaque génératrice est une ligne de courbure de la surface.

Quatrième et cinquième classes. — Les deux points communs se confondent.

Arrivons maintenant au système adjoint de première espèce et prenons encore les équations du cercle sous la forme

$$\begin{cases} u_1 x + u_2 y + u_3 - z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 + u_4 x + u_5 y + u_6 = 0. \end{cases}$$

Posons

$$\begin{aligned} D &= u_1(2y + u_5) - u_2(2x + u_4), \\ R &= -(2y + u_5) + \lambda(2x + u_4), \\ S &= u_2 - \lambda u_1; \end{aligned}$$

on trouve, par un calcul facile,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial u_1} + \lambda \frac{\partial y}{\partial u_1} = x \frac{R}{D}, \qquad && \frac{\partial x}{\partial u_4} + \lambda \frac{\partial y}{\partial u_4} = x \frac{S}{D}, \\ &\frac{\partial x}{\partial u_2} + \lambda \frac{\partial y}{\partial u_2} = y \frac{R}{D}, && \frac{\partial x}{\partial u_5} + \lambda \frac{\partial y}{\partial u_5} = y \frac{S}{D}, \\ &\frac{\partial x}{\partial u_3} + \lambda \frac{\partial y}{\partial u_3} = \frac{R}{D}, && \frac{\partial x}{\partial u_6} + \lambda \frac{\partial y}{\partial u_6} = \frac{S}{D}. \end{aligned}$$

Le système adjoint s'obtient, par suite, en éliminant x, y entre les relations

$$x = \frac{T_1}{T_3} = \frac{T_4}{T_6},$$

$$y = \frac{T_2}{T_3} = \frac{T_5}{T_6},$$

$$x^2 + y^2 + (u_1 x + u_2 y + u_3)^2 + u_4 x + u_5 y + u_6 = 0.$$

On a trouvé, pour une expression de la forme fondamentale,

$$M(u \mid du) = Q(u \mid N) = N_1^2 + N_2^2 + (u_1 N_1 + u_2 N_2 + N_3)^2 + u_4 N_1 N_3 + u_5 N_2 N_3 + u_6 N_3^2,$$

en y faisant $k = 1$ et posant

$$\begin{aligned} N_1(u \mid du) &= N_1 = du_3\, du_5 - du_2\, du_6, \\ N_2(u \mid du) &= N_2 = du_1\, du_6 - du_3\, du_4, \\ N_3(u \mid du) &= N_3 = du_2\, du_6 - du_1\, du_5. \end{aligned}$$

Les équations du système adjoint de première espèce apparaissent donc sous la forme suivante :

$$N_1(u \mid T) = 0,$$
$$N_2(u \mid T) = 0,$$
$$N_3(u \mid T) = 0,$$
$$Q(u \mid T) = 0.$$

Les trois premières équivalent à deux équations.

III. — Les surfaces de singularités.

On connaît l'importance qu'il y a, dans la théorie des systèmes de droites, à associer à chaque système une surface qui, pour le complexe, est la surface de singularités et, pour la congruence, la surface focale.

Lorsqu'on aborde la théorie des systèmes de courbes construits avec un élément donné, on est amené à chercher s'il n'est pas possible d'associer à chaque système une surface jouant le rôle des surfaces précédentes.

La question a été résolue depuis longtemps par M. Darboux en ce qui concerne les congruences, c'est-à-dire les systèmes de courbes dépendant de deux paramètres a et b [1]. M. Darboux, considérant les équations

$$f(x, y, z, a, b) = 0,$$
$$\varphi(x, y, z, a, b) = 0$$

d'un système de courbes dépendant de deux paramètres a et b, remarque que, si l'on exprime que l'une des courbes du système passe par un point M, a et b seront, en général, déterminés. La condition que le plan tangent en M à une surface soit tangent à l'une des courbes qui y passent conduit à une équation aux dérivées partielles qui se décompose en équations linéaires. L'intégrale générale est formée des courbes pour lesquelles b est une fonction de a.

Si, entre les équations

$$(\alpha) \qquad f = 0, \qquad \varphi = 0, \qquad \frac{\frac{\partial f}{\partial a}}{\frac{\partial \varphi}{\partial a}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial b}}{\frac{\partial \varphi}{\partial b}},$$

---

(1) DARBOUX, *Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre* et *Leçons sur la théorie genérale des surfaces.*

on élimine a et b, on obtient une surface qui est la *surface focale* du système de courbes: c'est la solution singulière. Cette surface focale est l'enveloppe de toutes les intégrales générales et peut être considérée comme lieu des intersections successives de deux courbes infiniment voisines du système; toutes ces courbes lui sont tangentes en un nombre limité de points; les points de contact de l'une des courbes avec la surface focale s'obtiennent en résolvant les équations (α) dans lesquelles a et b ont reçu les valeurs qui correspondent à la courbe considérée; ces points portent le nom de *points focaux*.

Ce point rappelé, supposons qu'on adopte comme élément une courbe dépendant de $(n+1)$ paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ et dont nous prendrons, comme précédemment, les équations sous la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} x = f(z, u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}) = f(z \mid u), \\ y = \varphi(z \mid u). \end{cases}$$

Désignons par $S_n, S_{n-1}, \ldots, S_{n-k+1}, \ldots, S_1, S_0$ les systèmes de courbes que l'on peut former avec l'élément considéré, l'indice indiquant l'indétermination du système. Nous avons vu qu'à chacun des systèmes $S_n, S_{n-1}, \ldots, S_3$ on pouvait faire correspondre un système adjoint de la forme fondamentale; c'est par l'interprétation géométrique des équations qui conduisent à ces systèmes adjoints que nous parviendrons aux surfaces de singularités des différents systèmes de courbes.

Considérons le système S_{n-k+1} défini par les k relations

$$(2) \qquad \theta_1(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}) = 0, \qquad \ldots, \qquad \theta_k(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}) = 0$$

entre les paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$, et supposons que k soit inférieur à $(n-1)$. A ce système correspond le système adjoint de $k^{\text{ième}}$ espèce composé des $(n-k-1)$ formes que nous avons représentées par les symboles

$$\mathfrak{M}_1(u \mid T^1, T^2, \ldots, T^k), \quad \ldots, \quad \mathfrak{M}_{n-k-1}(u \mid T^1, T^2, \ldots, T^k).$$

Éliminons $z, \lambda, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ entre les équations

$$(3) \qquad \frac{\mu_1 \dfrac{\partial \theta_1}{\partial u_1} + \mu_2 \dfrac{\partial \theta_2}{\partial u_1} + \ldots + \mu_k \dfrac{\partial \theta_k}{\partial u_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial u_1} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_1}} = \ldots = \frac{\mu_1 \dfrac{\partial \theta_1}{\partial u_{n+1}} + \mu_2 \dfrac{\partial \theta_2}{\partial u_{n+1}} + \ldots + \mu_k \dfrac{\partial \theta_k}{\partial u_{n+1}}}{\dfrac{\partial f}{\partial u_{n+1}} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_{n+1}}};$$

nous obtenons les $(n - k - 1)$ équations

$$(4) \quad \mathfrak{M}_1\left(u \left| \frac{\partial\theta_1}{\partial u}, \frac{\partial\theta_2}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial\theta_k}{\partial u}\right.\right) = 0, \quad \ldots, \quad \mathfrak{M}_{n-k-1}\left(u \left| \frac{\partial\theta_1}{\partial u}, \frac{\partial\theta_2}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial\theta_k}{\partial u}\right.\right) = 0.$$

Les courbes du système S_{n-k+1} qui satisfont à ces relations sont les *courbes singulières*.

Si l'on élimine les paramètres λ, μ_1, μ_2, ..., μ_k, u_1, ..., u_{n+1} entre les équations (1), (2), (3), on obtient généralement une seule équation

$$S(x, y, z) = 0$$

entre x, y, z. La surface représentée par cette équation est la *surface de singularités*, et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Les courbes singulières forment une congruence et sont tangentes à la surface de singularités qui est une des nappes de la surface focale de la congruence.

Il suffit, pour s'en convaincre, de considérer le mode de formation des équations (4) et de remarquer que, si

$$f(x, y, z, a, b) = 0,$$
$$\varphi(x, y, z, a, b) = 0$$

sont les équations d'une courbe dépendant de deux paramètres a et b, les points focaux s'obtiennent en adjoignant à ces deux équations celle qu'on forme en annulant le déterminant fonctionnel des deux fonctions f et φ par rapport aux variables a et b.

Nous avons défini les courbes singulières et la surface de singularités de l'un quelconque des systèmes S_n, S_{n-1}, ..., S_3; pour le système général S_{n-k+1}, il nous a suffi d'adjoindre aux équations (1) et (2) les équations (3).

Que deviennent ces notions lorsqu'on considère le système S_2? Dans ce cas, on a $k = n - 1$, et les équations (3) constituent la condition nécessaire et suffisante pour que le déterminant fonctionnel des $(n + 1)$ fonctions f, φ, θ_1, θ_2, ..., θ_{n-1} par rapport aux $(n + 1)$ variables u_1, u_2, ..., u_{n+1} soit nul; l'élimination des paramètres z, λ, μ_1, ..., μ_{n-1}, u_1, ..., u_{n+1} entre les équations (1), (2), (3) conduit donc, dans ce cas, à la surface focale de la congruence.

Ainsi la surface focale apparaît comme la surface de singularités de la

congruence pour laquelle on peut dire que tous les cercles sont singuliers.

Revenons à la surface de singularités du système général S_{n-k+1}, l'indice k pouvant prendre maintenant les valeurs $1, 2, 3, \ldots, (n-1)$, et cherchons le plan tangent en un point de cette surface. L'équation de la surface de singularités s'obtient en éliminant $\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_k, u_1, \ldots, u_{n+1}$ entre les équations (1), (2), (3); on peut se dispenser d'effectuer cette élimination en convenant de conserver toutes ces équations et d'y regarder $\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_k, u_1, \ldots, u_{n+1}$ comme des fonctions à déterminer; le plan tangent à la surface de singularités s'obtiendra alors en différentiant les équations (1), (2), (3), dans lesquelles on considérera $\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_k, u_1, \ldots, u_{n+1}$ comme des variables; or différentions les équations (1), et formons la combinaison

$$dx + \lambda\, dy.$$

En vertu des équations (2), (3), il vient

$$dx + \lambda\, dy = \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) dz.$$

Cette équation qui définit le plan tangent conduit naturellement aux propriétés générales des surfaces de singularités.

Considérons un système S_{n-k} défini par les équations

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad \ldots, \quad \theta_k = 0, \quad \theta_{k+1} = 0$$

et le système S_{n-k+1} défini par les k premières de ces équations

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad \ldots, \quad \theta_k = 0;$$

envisageons une courbe singulière de S_{n-k+1}, vérifiant $\theta_{k+1} = 0$; il apparaît immédiatement que ce sera aussi une courbe singulière du système S_{n-k}; de plus, le point de contact avec la surface de singularités et le plan tangent en ce point seront identiques pour les deux systèmes; ceci est applicable à toutes les courbes singulières de S_{n-k+1} qui vérifient l'équation $\theta_{k+1} = 0$ et qui forment une surface; on a donc la proposition suivante :

La surface de singularités d'un système S_{n-k} *contenu dans le système* S_{n-k+1} *est circonscrite à la surface de singularités de* S_{n-k+1}.

On peut donner à cette proposition d'autres formes, par exemple, la suivante, qui nous sera utile :

La surface de singularités d'un système S_{n-k} *est une enveloppe des surfaces de singularités des systèmes* S_{n-k+1} *qui contiennent ce système* S_{n-k}.

Considérons maintenant un système S_{n-k}, défini par les équations

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad \ldots, \quad \theta_k = 0, \quad \theta_{k+1} = 0,$$

et le système S_{n-k+2}, défini par les $(k-1)$ premières de ces équations

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad \ldots, \quad \theta_{k-1} = 0.$$

Une courbe singulière de S_{n-k+2}, qui vérifie les équations $\theta_k = 0$, $\theta_{k+1} = 0$, sera aussi une courbe singulière de S_{n-k}. De plus, le point de contact avec la surface de singularités et le plan tangent en ce point seront identiques pour les deux systèmes. Ceci est applicable à toutes les courbes singulières de S_{n-k+2}, qui vérifient les équations $\theta_k = 0$, $\theta_{k+1} = 0$ et qui sont en nombre limité. On a donc la proposition suivante, qui peut d'ailleurs être considérée comme une conséquence du théorème précédent :

La surface de singularités d'un système S_{n-k}, *contenu dans le système* S_{n-k+2}, *est tangente en un nombre limité de points à la surface de singularités de* S_{n-k+2}.

Ou encore :

La surface de singularités d'un système S_{n-k} *est une enveloppe des surfaces de singularités des systèmes* S_{n-k+2} *qui contiennent* S_{n-k}.

Les théorèmes précédents s'appliquent au système S_1, si l'on prend pour surface de singularités de S_1 la surface sur laquelle sont réparties toutes les courbes de S_1 ; il suffit, pour s'en convaincre, de répéter les mêmes raisonnements. On a ainsi les théorèmes suivants qui, lorsqu'on prend comme élément la droite, deviennent les théorèmes connus relatifs aux systèmes de droites :

La surface de singularités d'un complexe (ou système triplement indéterminé) de courbes est circonscrite à la surface focale de toute congruence de ce complexe.

La surface de singularités d'un complexe de courbes touche en un nombre limité de points toute surface du complexe.

La surface focale d'une congruence est circonscrite à toute surface de la congruence.

On connaît la proposition qui établit un lien entre la surface de singularités du complexe de droites et les cônes du complexe. Nous devons montrer qu'elle n'est qu'un cas particulier d'une proposition générale relative aux systèmes de courbes.

Considérons d'abord une congruence, une courbe C de cette congruence, et soit P un point de contact de C avec la surface focale; les courbes de la congruence passant par un point de l'espace forment un système S_0. Si le point de l'espace tend vers le point P, deux courbes de S_0 tendent à se confondre avec C; on peut dire que C est une *ligne double* du système S_0 correspondant à P et l'on a la proposition suivante :

Les courbes d'une congruence passant par un point P *de l'espace forment un système* S_0; *le lieu du point* P, *tel que l'une des courbes passant par ce point soit une ligne double de* S_0, *est la surface focale de la congruence.*

Si l'on considère maintenant un complexe, il résulte immédiatement de la définition de la surface de singularités la proposition suivante :

Les courbes du complexe, passant par un point P *de l'espace, forment un système* S_1 *de courbes réparties sur une surface à point conique* Σ_1; *le lieu du point* P, *tel que l'une des courbes passant par ce point soit une ligne double de la surface* Σ_1, *est la surface de singularités du complexe. La courbe qui forme la ligne double est une courbe singulière. Les surfaces* Σ_1 *à point conique, qui dépendent de trois paramètres, ont néanmoins une enveloppe qui est la surface de singularités du complexe.*

Il n'y a aucune difficulté à étendre ce théorème aux systèmes généraux de courbes : il suffit de généraliser les notions bien connues relatives aux droites doubles des congruences et complexes de droites.

Soit un système S_{n-k+1}, défini par les k équations

$$\theta_1 = 0, \qquad \theta_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \theta_k = 0.$$

Une courbe $(u+du)$, infiniment voisine d'une courbe (u) du système et appartenant à ce système, vérifie les équations

$$\boxed{\theta_1, du} = 0, \qquad \boxed{\theta_2, du} = 0, \qquad \ldots, \qquad \boxed{\theta_k, du} = 0.$$

La courbe (u) sera une *courbe double* du système S_{n-k+1}, si ce système d'équations est indéterminé.

Cette définition posée, on a la proposition suivante :

Les courbes d'un système S_{n-k+1}, *passant par un point* P *de l'espace, forment un système* S_{n-k-1}; *le lieu du point* P, *tel que l'une des courbes passant par ce point soit une courbe double du système* S_{n-k-1}, *est la surface de singularités de* S_{n-k+1}. *La courbe double est une courbe singulière de* S_{n-k+1}.

Si l'on considère une courbe double d'un système, pour tous les systèmes compris dans le premier et contenant cette courbe, elle sera également une courbe double.

En particulier, les surfaces à point conique, relatives à tous les points d'une courbe double d'un complexe, admettront toutes cette courbe pour ligne double.

IV. — Les systèmes de cercles.

Surfaces cerclées.

Une surface cerclée est représentée par les cinq équations

$$\theta_1(u_1, u_2, \ldots, u_6) = 0, \qquad \theta_2(u_1, u_2, \ldots, u_6) = 0, \qquad \theta_3(u_1, \ldots, u_6) = 0,$$
$$\theta_4(u_1, \ldots, u_6) = 0, \qquad \theta_5(u_1, \ldots, u_6) = 0.$$

Un cercle $(u+du)$, infiniment voisin d'un cercle (u) de la surface et appartenant à cette surface, vérifie les équations

$$\boxed{\theta_1, du} = 0, \quad \boxed{\theta_2, du} = 0, \quad \boxed{\theta_3, du} = 0, \quad \boxed{\theta_4, du} = 0, \quad \boxed{\theta_5, du} = 0.$$

Appelons Δ_α le déterminant obtenu en retranchant la colonne d'indice α

dans le Tableau :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\theta_1}{\partial u_1} & \frac{\partial\theta_1}{\partial u_2} & \frac{d\theta_1}{\partial u_3} & \frac{\partial\theta_1}{\partial u_4} & \frac{\partial\theta_1}{\partial u_5} & \frac{\partial\theta_1}{du_6} \\ \frac{\partial\theta_2}{\partial u_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial\theta_2}{du_6} \\ \frac{\partial\theta_3}{\partial u_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\theta_4}{\partial u_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\theta_5}{\partial u_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial\theta_5}{\partial u_6} \end{vmatrix}.$$

On déduit des équations précédentes

$$\frac{du_1}{\Delta_1} = \frac{du_2}{\Delta_2} = \dots = \frac{du_6}{\Delta_6}.$$

On peut considérer les Δ comme les coordonnées homogènes de la corrélation relative au cercle (u), c'est-à-dire de la corrélation anharmonique que la surface définit sur ce cercle, en vertu du théorème sur la distribution des sphères tangentes.

Posons $I = M(\Delta)$ et considérons les cercles de la surface pour lesquels la quantité I est nulle. On a $I = 0$ quand tous les Δ sont nuls, et alors le cercle (u) est une ligne double de la surface. Écartant ce cas, l'équation $I = 0$ exprime qu'autour du cercle (u) la surface cerclée se comporte comme une surface de la deuxième classe : les normales le long du cercle rencontrent, outre l'axe de ce cercle, une droite fixe, etc.

On voit, de plus, que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface cerclée soit une surface de la deuxième classe, c'est que l'équation

$$I = 0$$

soit vérifiée par tous ses cercles, sans que les déterminants Δ soient tous et toujours nuls.

Posons

$$J_1 = N_1(\Delta), \qquad J_2 = N_2(\Delta), \qquad J_3 = N_3(\Delta).$$

Pour certaines surfaces, il existera des cercles de la surface pour lesquels les deux conditions obtenues en écrivant

$$J_1 = 0, \qquad J_2 = 0, \qquad J_3 = 0$$

seront vérifiées. Ces équations expriment qu'autour du cercle (u) la surface se comporte comme une surface cerclée de la troisième classe. Ainsi, les normales correspondant aux points de la génératrice forment un cône de révolution, et cette génératrice est une ligne de courbure de la surface.

Si, de plus, la condition $P(\Delta) = 0$ est vérifiée, la surface se comporte comme une surface de la quatrième classe, ou comme une surface de la cinquième classe.

Nous voyons en même temps que les conditions nécessaires et suffisantes pour que toutes les génératrices soient des lignes de courbure s'obtiennent en écrivant que les deux conditions qui résultent de

$$J_1 = J_2 = J_3 = 0$$

sont vérifiées par tous les cercles, sans que les déterminants Δ soient tous et toujours nuls.

Deux surfaces cerclées qui, sur un cercle, définissent la même corrélation, se raccordent suivant ce cercle. Parmi les surfaces qui, suivant un cercle, se raccordent avec une surface cerclée donnée, on peut distinguer les *cyclides de raccordement*. Voici comment on les obtient :

Soient (a, α), (b, β), (c, γ) trois couples de la corrélation relative à un cercle (u) d'une surface cerclée; soient A, B, C trois cercles appartenant respectivement à ces couples. La cyclide engendrée, suivant le mode de génération de M. Casey, en prenant les trois cercles A, B, C pour directrices, est de raccordement.

On voit ainsi que ces cyclides sont triplement indéterminées. On peut, en effet, les envisager comme des cyclides passant par deux cercles (u) et $(u + du)$ infiniment voisins.

On pourrait définir les cyclides de raccordement en les considérant comme des anallagmatiques. Ce point a été traité par M. Demartres.

Congruences de cercles.

Une congruence est définie par quatre équations

$$\theta_1(u_1, \ldots, u_6) = 0, \qquad \theta_2(u_1, \ldots, u_6) = 0,$$
$$\theta_3(u_1, \ldots, u_6) = 0, \qquad \theta_4(u_1, \ldots, u_6) = 0.$$

Si (u) et $(u + du)$ sont deux cercles infiniment voisins de la congruence,

on a

$$\boxed{\varsigma_1, du} = 0, \quad \boxed{\varsigma_2, du} = 0, \quad \boxed{\varsigma_3, du} = 0, \quad \boxed{\varsigma_4, du} = 0$$

ou, en introduisant les coordonnées t d'une corrélation

$$\boxed{\varsigma_1, t} = 0, \quad \boxed{\varsigma_2, t} = 0, \quad \boxed{\varsigma_3, t} = 0, \quad \boxed{\varsigma_4, t} = 0.$$

Les corrélations sur un cercle d'une congruence qui appartiennent à la congruence forment donc un système M_1.

Le lieu des points P correspondant aux corrélations d'un système M_1 est une conique : les coordonnées du point P correspondant à l'une de ces corrélations sont, en effet, des fractions rationnelles d'un paramètre λ pour lesquelles les numérateurs et les dénominateurs sont du second degré. On a donc la conclusion suivante :

Les corrélations qui appartiennent à une congruence sur un de ses cercles admettent quatre couples simples fixes (a_1, S_1), (a_2, S_2), (a_3, S_3), (a_4, S_4).

L'existence de ces quatre couples montre que, parmi les corrélations qui appartiennent à la congruence, il y en a quatre singulières; cela résulte aussi d'ailleurs de la considération de la forme fondamentale; de là ce théorème analogue au théorème de Monge, relatif aux congruences de droites :

Étant donné un cercle d'une congruence, il existe quatre cercles de la congruence infiniment voisins du premier et le rencontrant.

(a_1, S_1), (a_2, S_2), (a_3, S_3), (a_4, S_4) sont manifestement les couples singuliers des corrélations singulières, en considérant a_1, a_2, a_3, a_4 comme des doubles points; les points a_1, a_2, a_3, a_4 sont les *points focaux* et les sphères S_1, S_2, S_3, S_4 les *sphères focales* de la congruence.

Les points focaux ne dépendent que de deux paramètres ainsi que les sphères focales. Les points focaux engendrent donc des surfaces, les sphères focales enveloppent des surfaces.

Soient A_1, A_2, A_3, A_4 les quatre surfaces lieux des points a_1, a_2, a_3, a_4; elles pourront constituer, soit quatre surfaces distinctes, soit plus habituellement quatre nappes d'une seule et même surface qui est la *surface focale*.

Envisageons une surface cerclée de la deuxième classe de la congruence, une de ses génératrices (u) et l'arête de rebroussement (c) de la surface,

courbe à laquelle cette génératrice reste constamment tangente; le point α_1 de contact de (u) avec (c), considéré comme double point, et la sphère Σ_1 correspondant à α_1 forment un couple singulier de ce cercle; d'ailleurs, puisqu'il correspond quatre couples singuliers à chaque cercle d'une congruence, tout cercle de la congruence appartient à quatre surfaces de la deuxième classe de cette congruence; les quatre points tels que α_1 sont identiques à a_1, a_2, a_3, a_4 et les quatre sphères, telles que Σ_1, à S_1, S_2, S_3, S_4. On en conclut que les quatre surfaces A_1, A_2, A_3, A_4 sont respectivement le lieu des quatre séries d'arêtes de rebroussement (c) des surfaces de la deuxième classe de la congruence, et par suite que :

Les cercles de la congruence sont tangents en quatre points à la surface focale.

Si nous considérons la corrélation singulière dans laquelle (a_1, S_1) est le couple singulier, (a_2, S_2), (a_3, S_3), (a_4, S_4) seront trois couples simples. Une surface de la deuxième classe a son arête de rebroussement C_{a_1} sur la surface A_1, par exemple, et est circonscrite aux surfaces A_2, A_3, A_4 suivant des courbes C_{a_2}, C_{a_3}, C_{a_4}. La sphère S_2 étant tangente en a_2 à la surface de la deuxième classe est donc tangente en a_2 à la surface A_2; de même S_3 est tangente en a_3 à A_3 et S_4 est tangente en a_4 à A_4; par conséquent :

Les sphères focales sont tangentes à la surface focale.

De ce qui précède, résulte encore la proposition suivante :

Les surfaces cerclées d'une congruence qui ont une génératrice (u) *commune se raccordent toutes suivant les couples* (a_1, S_1), (a_2, S_2), (a_3, S_3), (a_4, S_4).

Nous avons retrouvé, dans le cas du cercle, la surface focale considérée par M. Darboux dans le cas général et rattachée, comme nous l'avons rappelé, à la théorie des solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

La surface focale se présente également, ainsi que l'a montré M. Lie, lorsque l'on considère les transformations de contact [1].

---

[1] LIE (S.), *Over en Classe geometriske Transformationer* (I. *Christiana Videnskabsselskabs Forhandlinger*, 1871, p. 67-109). — *Ueber Complexe insbesondere Linien- und Kugelcomplexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen* (*Mathematische Annalen*, t. V).

Soient

$$\psi_1(x, y, z, X, Y, Z) = 0,$$
$$\psi_2(x, y, z, X, Y, Z) = 0$$

les équations d'un cercle, où X, Y, Z sont les coordonnées courantes, et x, y, z trois paramètres.

Nous définirons une congruence de cercles en adjoignant à ces équations une relation entre x, y, z

$$F(x, y, z) = 0.$$

Si l'on considère x, y, z comme les coordonnées d'un point, nous faisons correspondre à un point de la surface $F(x, y, z) = 0$ un cercle. A la surface correspond la congruence de cercles.

Considérons sur chaque cercle l'un des points (X, Y, Z) de contact avec la surface focale et la transformation qui permet de passer du point (x, y, z) au point (X, Y, Z); on aperçoit immédiatement qu'elle jouit des propriétés des transformations de contact. On est ainsi amené à poser la question suivante.

Proposons-nous de résoudre l'identité connue

$$dZ - P\,dX - Q\,dY = \rho(dz - p\,dx - q\,dy)$$

en partant des deux relations

$$\psi_1(x, y, z, X, Y, Z) = 0,$$
$$\psi_2(x, y, z, X, Y, Z) = 0.$$

L'équation

$$\frac{\dfrac{\partial\psi_1}{\partial z}p + \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x}}{\dfrac{\partial\psi_1}{\partial z}q + \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial\psi_2}{\partial z}p + \dfrac{\partial\psi_2}{\partial z}}{\dfrac{\partial\psi_2}{\partial z}q + \dfrac{\partial\psi_2}{\partial y}},$$

jointe à ces deux relations, détermine X, Y, Z en fonction de z, x, y, p, q.

On peut interpréter ceci de la façon suivante.

Étant donnée une surface par l'équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

on en tire z en fonction de x et y; on porte cette valeur dans $\psi_1 = 0$,

$\psi_2 = 0$, qui deviennent, en posant $x = a$, $y = b$,

$$f(X, Y, Z, a, b) = 0,$$
$$\varphi(X, Y, Z, a, b) = 0.$$

On cherche la surface enveloppe des cercles ainsi obtenus en éliminant a et b entre les équations

$$f = 0, \qquad \varphi = 0,$$
$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial a}}{\frac{\partial \varphi}{\partial a}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial b}}{\frac{\partial \varphi}{\partial b}}.$$

On obtient ainsi la surface correspondant à la surface $F(x, y, z) = 0$. Ainsi, *quand le point* (x, y, z) *décrit une surface* $F(x, y, z) = 0$, *la congruence correspondante enveloppe une surface qui est la surface focale.*

L'équation aux dérivées partielles

$$\psi(X, Y, Z) = 0$$

aura ici la signification suivante : trouver une surface telle que la congruence qui se déduit de cette surface par les équations

$$\psi_1(x, y, z, X, Y, Z) = 0,$$
$$\psi_2(x, y, z, X, Y, Z) = 0$$

ait pour surface focale

$$\psi(X, Y, Z) = 0.$$

La solution singulière sera la véritable solution du problème.

Inversement, si l'on considère x, y, z comme fonctions de X, Y, Z, P, Q, l'équation aux dérivées partielles

$$\chi(x, y, z) = 0$$

aura la signification suivante : trouver la surface focale correspondant à $\chi(x, y, z) = 0$. La solution singulière sera encore la véritable solution du problème.

Un cas particulièrement remarquable est celui où les équations du cercle

sont

$$Xx + Yy + Zz = 0,$$
$$X^2 + Y^2 + Z^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

On arrive à la transformation apsidale considérée par M. Darboux [1].

Lorsque le point (x, y, z) décrit une surface

$$F(x, y, z) = 0,$$

la congruence de cercles enveloppe la surface focale

$$\varphi(X, Y, Z) = 0,$$

qui est l'apsidale de la surface $F(x, y, z) = 0$.

Inversement, la surface $F(x, y, z) = 0$ étant l'apsidale de la surface $\varphi(X, Y, Z) = 0$, si l'on considère l'équation aux dérivées partielles

$$\varphi(X, Y, Z) = 0,$$

la solution singulière est la surface apsidale de

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

Complexes de cercles.

Trois équations,

$$(1) \qquad \mathcal{G}_1(u_1, u_2, \ldots, u_6) = 0, \qquad \mathcal{G}_2(u_1, \ldots, u_6), \qquad \mathcal{G}_3(u_1, \ldots, u_6) = 0,$$

définissent un complexe de cercles.

Si (u) et $(u + du)$ sont deux cercles infiniment voisins, les équations suivantes

$$\boxed{\mathcal{G}_1, du} = 0, \qquad \boxed{\mathcal{G}_2, du} = 0, \qquad \boxed{\mathcal{G}_3, du} = 0$$

doivent être vérifiées.

L'introduction des coordonnées des corrélations anharmoniques donne les relations

$$\boxed{\mathcal{G}_1, t} = 0, \qquad \boxed{\mathcal{G}_2, t} = 0, \qquad \boxed{\mathcal{G}_3, t} = 0$$

---

[1] DARBOUX, *Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, p. 211.

qui expriment que :

Toutes les corrélations anharmoniques sur un cercle d'un complexe, qui appartiennent à ce complexe, forment un système linéaire M_2.

Parmi les corrélations, il y en a trois doublement singulières; donc :

Étant donné un cercle du complexe, il existe trois cercles du complexe infiniment voisins du premier et le rencontrant en deux points.

On a trois couples doublement singuliers; ces couples dépendent de trois paramètres.

Considérons une surface cerclée de la troisième classe du complexe, une de ses génératrices (u) et la courbe (C) à laquelle toutes les génératrices sont tangentes en deux points. Le double point de contact de (u) et de (C) forme avec la sphère correspondante un couple doublement singulier de ce cercle; et, puisque à chaque cercle du complexe correspondent trois couples doublement singuliers, tout cercle du complexe appartient à trois surfaces de la troisième classe du complexe.

Si l'on considère les arêtes de rebroussement de ces trois surfaces, elles constituent trois systèmes de courbes à trois paramètres; les cercles du complexe sont tangents en deux points à chacune de ces courbes.

Soient

$$(1)\qquad \begin{cases} x = f(z \mid u), \\ y = \varphi(z \mid u) \end{cases}$$

les équations du cercle.

Éliminons z, λ, μ_1, μ_2, μ_3 entre les équations

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\mu_1 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial u_1} + \mu_2 \dfrac{\partial\theta_2}{\partial u_1} + \mu_3 \dfrac{\partial\theta_3}{\partial u_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial u_1} + \lambda \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1}} = \frac{\mu_1 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial u_2} + \mu_2 \dfrac{\partial\theta_2}{\partial u_2} + \mu_3 \dfrac{\partial\theta_3}{\partial u_2}}{\dfrac{\partial f}{\partial u_2} + \lambda \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_2}} = \ldots \\ &\qquad\qquad = \frac{\mu_1 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial u_6} + \mu_2 \dfrac{\partial\theta_2}{\partial u_6} + \mu_3 \dfrac{\partial\theta_3}{\partial u_6}}{\dfrac{\partial f}{\partial u_6} + \lambda \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_6}}; \end{aligned} \right.$$

nous obtenons l'équation

$$\mathfrak{M}_1\left(u \mid \frac{\partial\theta_1}{\partial u}, \frac{\partial\theta_2}{\partial u}, \frac{\partial\theta_3}{\partial u}\right) = 0.$$

Les cercles du complexe qui satisfont à cette équation sont les cercles singuliers; ils forment une congruence, et l'une des nappes de la surface focale de cette congruence est constituée par la surface de singularités dont on obtient l'équation en éliminant λ, μ_1, μ_2, μ_3, u_1, u_2, ..., u_6 entre les équations (1), (2) et (3).

Lorsque les équations d'un cercle du complexe seront données sous une autre forme, on obtiendra facilement la surface de singularités en utilisant la propriété que nous avons signalée de cette surface.

Supposons, par exemple, que les équations d'un cercle du complexe soient données sous la forme

$$(a) \qquad \begin{cases} f(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \\ \varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \end{cases}$$

X, Y, Z étant des paramètres variables.

Si l'on considère les cercles passant par un point (x_0, y_0, z_0) de l'espace, ils forment une surface à point conique, dont on obtiendra l'équation en éliminant X, Y, Z entre les équations (a) et les relations

$$f_0 = f(x_0, y_0, z_0, X, Y, Z) = 0,$$
$$\varphi_0 = \varphi(x_0, y_0, z_0, X, Y, Z) = 0.$$

Considérons un cercle (X, Y, Z) de la surface et le cercle infiniment voisin $(X + dX, Y + dY, Z + dZ)$. Ce dernier est déterminé par les équations

$$\frac{\partial f_0}{\partial X} dX + \frac{\partial f_0}{\partial Y} dY + \frac{\partial f_0}{\partial Z} dZ = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial X} dX + \frac{\partial \varphi_0}{\partial Y} dY + \frac{\partial \varphi_0}{\partial Z} dZ = 0,$$

qui définissent en général les rapports $dX : dY : dZ$.

Ces équations forment un système indéterminé dans le cas où l'on a

$$\frac{\dfrac{\partial f_0}{\partial X}}{\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial X}} = \frac{\dfrac{\partial f_0}{\partial Y}}{\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial Y}} = \frac{\dfrac{\partial f_0}{\partial Z}}{\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial Z}}.$$

Il y a alors deux valeurs pour le système des rapports $dX : dY : dZ$ et, par suite, deux nappes de la surface se coupant suivant le cercle correspondant.

Si l'on élimine X, Y, Z entre les équations (a) et les équations

$$(b) \qquad \frac{\frac{\partial f}{\partial X}}{\frac{\partial \varphi}{\partial X}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial Y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial Y}} = \frac{\frac{\partial f}{dZ}}{\frac{\partial \varphi}{\partial Z}} = \lambda,$$

on obtient l'équation

$$S(x, y, z) = 0$$

de la surface de singularités.

Le plan tangent en un point de cette surface sera déterminé par l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz - \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) = 0,$$

qu'on obtient en différentiant les équations (a) et tenant compte des équations (b). Cette équation conduirait facilement aux propriétés de la surface de singularités.

Systèmes de cercles quadruplement indéterminés.

Deux équations,

$$(2) \qquad \theta_1(u_1, u_2, \ldots, u_6) = 0, \qquad \theta_2(u_1, u_2, \ldots, u_6) = 0,$$

définissent un pareil système.

Si (u) et $(u + du)$ sont deux cercles infiniment voisins du système, les équations suivantes

$$\boxed{\theta_1, du} = 0, \qquad \boxed{\theta_2, du} = 0$$

doivent être vérifiées.

L'introduction des coordonnées des corrélations anharmoniques donne les relations

$$\boxed{\theta_1, t} = 0, \qquad \boxed{\theta_2, t} = 0,$$

qui expriment que :

Toutes les corrélations anharmoniques sur un cercle du système qui appartiennent à ce système forment un système linéaire M_3.

Adjoignons à $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$ les deux conditions

$$(1) \qquad \begin{cases} x = f(z \mid u), \\ y = \varphi(z \mid u), \end{cases}$$

qu'on obtient en exprimant que les cercles passent par un point $P(x, y, z)$ de l'espace. On définit ainsi une congruence de cercles à laquelle on pourra faire correspondre une congruence de droites en transformant par inversion et prenant pour pôle le point P. Les surfaces focales se correspondront. A une droite double de la congruence de droites correspondra un cercle double de la congruence de cercles.

Si l'on exprime que l'un des cercles (u) passant par le point P est un cercle double de la congruence, on a à éliminer z, λ, μ_1, μ_2 entre les équations

$$(3) \qquad \frac{\mu_1 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial u_1} + \mu_2 \dfrac{\partial\theta_2}{\partial u_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial u_1} + \lambda \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1}} = \frac{\mu_1 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial u_2} + \mu_2 \dfrac{\partial\theta_2}{\partial u_2}}{\dfrac{\partial f}{\partial u_2} + \lambda \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_2}} = \cdots = \frac{\mu_1 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial u_6} + \mu_2 \dfrac{\partial\theta_2}{\partial u_6}}{\dfrac{\partial f}{\partial u_6} + \lambda \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_6}},$$

et l'on obtient ainsi les deux relations

$$\mathfrak{M}_1\left(u \,\Big|\, \frac{\partial\theta_1}{\partial u}, \frac{\partial\theta_2}{\partial u}\right) = 0, \qquad \mathfrak{M}_2\left(u \,\Big|\, \frac{\partial\theta_1}{\partial u}, \frac{\partial\theta_2}{\partial u}\right) = 0.$$

Les cercles du système qui satisfont à ces relations sont les cercles singuliers; ils forment une congruence, et l'une des nappes de la surface focale de cette congruence est constituée par la surface de singularités dont on obtient l'équation en éliminant $\lambda, \mu_1, \mu_2, u_1, u_2, \ldots, u_6$ entre les équations (1), (2) et (3).

Lorsque les équations d'un cercle du système seront données sous une autre forme, il n'y aura aucune difficulté à obtenir la surface de singularités, en utilisant la propriété que nous avons signalée de cette surface.

Systèmes de cercles quintuplement indéterminés.

Soit l'équation d'un système quintuplement indéterminé

$$(2) \qquad \theta_1(u_1, u_2, \ldots, u_6) = 0.$$

Si (u) et $(u + du)$ sont deux cercles infiniment voisins du système, l'équa-

tion

$$\boxed{\theta_1, du} = 0$$

doit être vérifiée.

L'introduction des coordonnées des corrélations anharmoniques donne

$$\boxed{\theta_1, t} = 0$$

qui exprime que :

Toutes les corrélations anharmoniques sur un cercle du système, qui appartiennent à ce système, forment un système linéairé M_4.

Adjoignons à $\theta_1 = 0$ les deux conditions

$$(1) \qquad \begin{cases} x = f(z \mid u), \\ y = \varphi(z \mid u), \end{cases}$$

qu'on obtient en exprimant que les cercles passent par un point $P(x, y, z)$ de l'espace. On définit ainsi un complexe de cercles auquel on peut faire correspondre un complexe de droites en transformant par inversion et prenant pour pôle le point P. Aux droites singulières et à la surface de singularités de ce complexe de droites correspondront les cercles singnliers et la surface de singularités du complexe de cercles.

Exprimons que l'un des cercles (u) passant par le point P est un cercle double du complexe de cercles ou un cercle double de la surface à point conique relative à un point quelconque de ce cercle; nous avons à éliminer z, λ entre les équations

$$(3) \qquad \frac{\dfrac{\partial \theta_1}{\partial u_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial u_1} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_1}} = \frac{\dfrac{\partial \theta_1}{\partial u_2}}{\dfrac{\partial f}{\partial u_2} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_2}} = \dots = \frac{\dfrac{\partial \theta_1}{\partial u_6}}{\dfrac{\partial f}{\partial u_6} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_6}},$$

et nous obtenons les trois relations

$$(4) \qquad \mathfrak{M}_1\left(u \,\Big|\, \frac{\partial \theta_1}{\partial u}\right) = 0, \qquad \mathfrak{M}_2\left(u \,\Big|\, \frac{\partial \theta_1}{\partial u}\right) = 0, \qquad \mathfrak{M}_3\left(u \,\Big|\, \frac{\partial \theta_1}{\partial u}\right) = 0.$$

Les cercles du système qui satisfont à ces relations sont les cercles singuliers; ils forment une congruence, et l'une des nappes de la surface focale de cette congruence est constituée par la surface de singularités dont on obtient l'équation en éliminant λ, $u_1, \dots, u_6$ entre les équations (1), (2), (3).

On peut se proposer de savoir si les équations (4) peuvent être vérifiées identiquement par tous les cercles du système de cercles.

Les raisonnements que nous avons faits à l'égard de la surface de singularités subsistent, et l'on voit que tous les cercles du système sont alors tangents à cette surface.

Il est clair que ce que l'on vient de dire dans le cas du cercle s'applique lorsqu'on considère une courbe dépendant de $(n+1)$ paramètres; si l'on remarque que l'élimination de λ, $u_1, \ldots, u_6$ entre les équations (1), (2), (3) conduit dans certains cas particuliers à deux relations entre x, y, z, on peut énoncer ce théorème, dû à M. Kœnigs (¹) :

Si la fonction $\theta_1(u)$ vérifie les équations du système adjoint de première espèce, soit identiquement, soit en vertu de l'équation $\theta_1 = 0$, cette dernière exprime que les courbes qui la vérifient touchent une surface fixe ou rencontrent une courbe fixe.

M. Kœnigs a également démontré la réciproque :

Si l'équation $\theta_1 = 0$ est telle que les courbes qui la vérifient touchent une surface fixe ou rencontrent une courbe fixe, les équations du système adjoint de première espèce sont vérifiées par la fonction θ_1, soit identiquement, soit en vertu de l'équation $\theta_1 = 0$.

Nous établirons cette réciproque dans le cas où les courbes sont des cercles de la manière suivante :

Supposons, par exemple, que tous les cercles soient tangents à une surface, et soit P le point de contact de l'un des cercles (C); tous les cercles du système passant par le point P forment un complexe pour lequel (C) est un cercle double; il résulte, en effet, de la théorie des complexes de droites et des propriétés de l'inversion que la surface à point conique du complexe de cercles relative à un point quelconque du cercle (C) admet ce cercle comme ligne double.

Les relations (4) seront, par suite, vérifiées par le cercle (C).

Ajoutons que les équations des différents systèmes adjoints conduisent à des théorèmes analogues à celui de M. Kœnigs; nous n'insisterons pas sur ce point.

(¹) G. Kœnigs, *Sur une classe de formes de différentielles et sur la théorie des systèmes d'éléments* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CIV, p. 673-675, 842-844; *Acta mathematica*, t. X, p. 313-338).

SECONDE PARTIE.

LES SYSTÈMES LINÉAIRES DE CERCLES.

I. — Les systèmes de doubles points sur la sphère et en particulier les systèmes linéaires.

Étant donnée une sphère quelconque S_5, on peut la considérer comme faisant partie d'un système de cinq sphères S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 orthogonales deux à deux.

Un point quelconque de l'espace est représenté par ses cinq coordonnées pentasphériques x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 liées par la relation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0.$$

Les points de la sphère S_5 sont donc caractérisés par les quatre coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 liées par la relation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

L'équation d'une sphère quelconque étant

$$l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 + l_4 x_4 + l_5 x_5 = 0,$$

celle d'un cercle quelconque de la sphère S_5 sera

$$l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 + l_4 x_4 = 0;$$

R_1, R_2, R_3, R_4 étant les rayons des sphères S_1, S_2, S_3, S_4, on aura un grand cercle si la relation suivante est vérifiée :

$$\frac{l_1}{R_1} + \frac{l_2}{R_2} + \frac{l_3}{R_3} + \frac{l_4}{R_4} = 0.$$

Nous avons ainsi un système de coordonnées sur la sphère qui présente la plus grande analogie avec le système de coordonnées pentasphériques. Ce système de coordonnées s'applique d'ailleurs au plan ; les petits cercles sont remplacés par des cercles, les grands cercles sont remplacés par des droites. On peut dire aussi qu'on établit une correspondance entre les

[illegible] propriété du plan con-
[illegible] correspondre une propriété
[illegible] cercles. Ajoutons que,
[illegible] a déjà été considéré, sous
[illegible]

[illegible] déterminé par les quatre
[illegible] la sphère S_5; ces cer-
[illegible]

[illegible] par les équations

$$\sum \ldots = 0$$

[illegible]

[illegible] si l'on tient compte de ces
[illegible] comme les coordonnées du
[illegible] cercles donnés ou comme les
[illegible] de ces deux cercles.

[illegible] de chacun des cercles appar-
[illegible] des cercles coordonnés. Par
[illegible] a C_i a pour équation

$$\ldots - p_{\ldots} x_{\ldots} - p_{\ldots} x_{\ldots} = 0.$$

[illegible]dantes; il existe entre elles la re-

$$\ldots - p_{\ldots} p_{\ldots} = 0.$$

[illegible] des quantités p_{ik}; montrons
[illegible] les coordonnées pluckériennes de
[illegible] des deux cercles.

[illegible] pentasphériques, toute sphère

[illegible] analytique des cercles du plan [illegible] [illegible]ulaires du quatrième ordre [illegible]

est représentée par une équation linéaire

$$\sum_1^5 l_i x_i = 0;$$

les rapports mutuels des cinq quantités l_i sont les coordonnées de la sphère. La sphère se réduit à un plan, si l'on a

$$\sum \frac{l_i}{R_i} = 0,$$

en désignant par R_i le rayon de la sphère coordonnée $x_i = 0$.

Les plans de l'espace sont, par suite, déterminés par cinq quantités l_i, et ces coordonnées satisfont à la relation linéaire $\sum \frac{l_i}{R_i} = 0$.

On doit à M. Darboux la remarque suivante (¹) :

Le système actuel de coordonnées, quand il est employé à la détermination des plans, est un système de coordonnées tangentielles surabondantes; car les cinq coordonnées l_i sont proportionnelles aux distances divisées par R_i des centres des cinq sphères S_i au plan considéré.

Les quantités l_1, l_2, l_3, l_4 peuvent être considérées comme les coordonnées tangentielles du plan rapporté au tétraèdre des centres des sphères S_1, S_2, S_3, S_4.

Or, reportons-nous au double point d'intersection des cercles qui sont situés sur S_5 et qui ont pour équations, lorsqu'on choisit C_1, C_2, C_3, C_4 comme cercles coordonnés,

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0,$$
$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 = 0.$$

Le plan du premier cercle a pour équation, dans le système de coordonnées pentasphériques,

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + \lambda x_5 = 0,$$

où λ est une constante convenablement déterminée; donc a_1, a_2, a_3, a_4 peuvent être considérées comme les coordonnées tangentielles du plan du

---

(¹) DARBOUX, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, p. 260.

points d'une sphère et les points d'un plan ; à tou
cernant les droites et les cercles, on pourra faire
de la sphère relative aux grands cercles et aux p
pour le cas du plan, ce système de coordonné
une forme peu différente, par M. Gino Loria (

Le système de coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4
traces C_1, C_2, C_3, C_4 des sphères S_1, S_2, S
cles C_1, C_2, C_3, C_4 seront les *cercles coord*

Considérons sur la sphère S_5 deux cercl

$$\sum_1^4 a_i x_i = 0,$$

et posons

$$p_{ik} = a_i$$

en sorte qu'on a

$$p_{ii} = 0,$$

Les quantités p_{ik}, au nombre de
dernières relations, peuvent être
faisceau de cercles déterminé p
coordonnées du double-point d

Ces quantités interviennent
tenant au faisceau et orthog
exemple, le cercle du faisce

$$p_{ii}$$

Ces six quantités p_{ik} ne
lation

On peut donner u
qu'elles peuvent être
la droite du double
En effet, dans le

... conséquences

... sont orthogonaux
... passant par les deux
... d'eux on peut mener
... on peut, par celui-ci,
... dit alors que les deux

... si par l'un d'eux on peut
... oquement, on peut par celui-
... et l'on dira alors que les dou-

$$= 0.$$

... naire de $\Xi(p)$.
... sur S_5 dépend de quatre paramètres ; on
... des points définis par des équations
... les droites des doubles points forme-
... Si les équations sont linéaires, on a des
... représenter par les symboles K_3, K_2,
... mination du système.

(1) Gino Loria,
son application
Journal, t. XXII

Système K_3.

$$\Sigma a_{ik} p_{ik} = 0$$

ce système K_3.

ord l'étude de K_3 comme conséquence de celle du com-
droites.

ne la distribution des doubles points du système sur un
uve que :

s droites des doubles points situés sur un cercle C *passent*
me point O.

nt O est le foyer du plan du cercle C par rapport au complexe
formé par les droites des doubles points.

l'on considère le cercle C′ d'intersection de la sphère et du plan polaire
point O par rapport à cette sphère, on peut dire que :

Tous les doubles points d'un système K_3 qui sont situés sur un cercle sont
orthogonaux à un second cercle C′ qui est lui-même orthogonal à C.

Aux propriétés des droites conjuguées, on pourra faire correspondre des propriétés des doubles points déterminés par ces droites.

Nous pouvons, en partant des propriétés du complexe linéaire, parvenir, par des considérations géométriques, à la réduction à la forme canonique

$$\mathfrak{A}_{12}\mathfrak{P}_{12} + \mathfrak{A}_{34}\mathfrak{P}_{34},$$

de la forme bilinéaire

$$\Sigma a_{ik} p_{ik},$$

où

$$i = 1, 2, 3, 4, \qquad k = 1, 2, 3, 4 \qquad \text{et} \qquad p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i,$$

au moyen d'une même substitution orthogonale effectuée sur les x et sur les y.

En effet, considérons sur la sphère S_5 un cercle ayant pour équation

$$\sum_1^4 a_i x_i = 0.$$

Si l'on rapporte les points de la sphère à de nouveaux cercles coordonnés, les formules qui lient les coordonnées x_i aux nouvelles coordonnées constituent une substitution orthogonale; les formules liant les coefficients a_i

cercle rapporté au tétraèdre des centres de S_1, S_2, S_3, S_4 ; une conclusion semblable existant à l'égard du second cercle, on voit que :

Les six quantités p_{ik} sont les coordonnées pluckériennes de la droite du double point d'intersection des deux cercles, le tétraèdre de référence ayant pour sommets les centres des sphères S_1, S_2, S_3, S_4.

L'étude des doubles points situés sur une sphère S_5 pourra être faite, soit comme conséquence de l'étude des systèmes de droites, soit d'une façon directe en appliquant des principes analogues à ceux utilisés par M. Kœnigs dans l'étude des systèmes de cercles.

On pourra calculer la distance des deux points et l'on aura cette conséquence que la distance est nulle lorsque la forme

$$\Xi(p) = \Sigma p_{ij}^2$$

est nulle.

Nous dirons qu'un cercle et un double point (a_1, a_2) sont orthogonaux lorsque le cercle sera orthogonal à tous les cercles passant par les deux points a_1, a_2. Étant donnés deux cercles, si par l'un d'eux on peut mener une sphère orthogonale à l'autre, réciproquement, on peut, par celui-ci, mener une sphère orthogonale au premier, et l'on dit alors que les deux cercles sont *en involution*.

De même, étant donnés deux doubles points, si par l'un d'eux on peut mener un cercle orthogonal à l'autre, réciproquement, on peut par celui-ci mener un cercle orthogonal au premier, et l'on dira alors que les doubles points sont *en involution*.

La condition d'involution sera d'ailleurs

$$\Xi(p, p') = 0,$$

en désignant par $\Xi(p, p')$ la forme polaire de $\Xi(p)$.

La position d'un double point sur S_5 dépend de quatre paramètres ; on peut concevoir des systèmes de doubles points définis par des équations homogènes entre les coordonnées p_{ik} ; les droites des doubles points formeront des systèmes correspondants. Si les équations sont linéaires, on a des *systèmes linéaires* que l'on peut représenter par les symboles K_3, K_2, K_1, K_0, l'indice indiquant l'indétermination du système.

qui passent par un point donné et sont situées dans un plan

donnée par M. Halphen suppose essentiellement que
ıe de la surface ne passe qu'une seule génératrice;
s aux quadriques. En se servant des principes qui
le cas général, on arrive facilement au théorème

ectilignes d'une quadrique qui satisfont à
duit du degré de la surface par le *double*

ant connue la théorie des complexes
directement, en répétant les rai-
s des systèmes de cercles.

$$= o,$$

défini par l'équation

$$\Sigma a_{ik} p_{ik} = o.$$

$$l'_i = \sum_k a_{ik} l_k,$$

e C' orthogonal à C et défini par l'équation

$$\Sigma l'_i x_i = o.$$

Σ

$$\sum_i \lambda_i x_i = o,$$

C suivant un double point faisant partie du système K_3; on devra
la condition

$$\Sigma l'_i \lambda_i = o,$$

qui exprime que les cercles C' et Σ sont orthogonaux; donc :

Tous les doubles points d'un système K_3 *qui se trouvent sur un cercle* C *sont orthogonaux à un second cercle* C' *qui est lui-même orthogonal à* C.

Cherchons les cercles C qui coïncident avec le cercle C′ qui leur correspond; les rayons de ces cercles seront nuls et l'on aura, pour l'un de ces cercles,

$$\frac{l'_1}{l_1} = \frac{l'_2}{l_2} = \frac{l'_3}{l_3} = \frac{l'_4}{l_4} = -s,$$

s étant un paramètre à déterminer; d'ailleurs on a

$$l'_i = \sum_k a_{ik} l_k.$$

L'inconnue s sera, par suite, déterminée par l'équation

$$\begin{vmatrix} s & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & s & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = s^4 + \mathrm{I}s^2 + \mathrm{J} = 0,$$

en posant

$$\mathrm{I} = \Sigma a_{ij}^2,$$
$$\mathrm{J} = (a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23})^2.$$

Représentons par $\xi(a)$ la forme adjointe de $\Xi(p)$ et par $\omega(a)$ la forme adjointe de $\Omega(p)$; on voit que l'on a

$$\mathrm{I} = \xi(a),$$
$$\mathrm{J} = [\omega(a)]^2.$$

Les quantités I et J sont les invariants du système K_3.

Désignons par σ, $-\sigma$, σ', $-\sigma'$ les racines de l'équation

$$s^4 + \mathrm{I}s^2 + \mathrm{J} = 0.$$

A chacune répond un cercle de rayon nul, ce qui donne les quatre cercles Σ, Σ_0, Σ', Σ'_0, dont nous désignerons les centres par C, C_0, C′, C'_0; ces quatre points sont les mêmes que ceux que nous avons considérés précédemment.

On aperçoit immédiatement que les cercles Σ et Σ_0 sont orthogonaux aux cercles Σ' et Σ'_0 : les droites CC′, CC'_0, $\mathrm{C}_0\mathrm{C}'$, $\mathrm{C}_0\mathrm{C}'_0$ sont donc quatre droites isotropes et les droites CC_0, $\mathrm{C}'\mathrm{C}'_0$ sont conjuguées par rapport à la sphère.

Prenons pour cercles coordonnés C_1 et C_2 deux cercles orthogonaux

passant par les deux points C et C_0, pour cercles C_3 et C_4 deux cercles orthogonaux passant par C′ et C'_0; ce système de quatre cercles sera quadruplement orthogonal, et l'équation du système K_3 deviendra

$$\mathcal{A}_{12}\mathcal{P}_{12} + \mathcal{A}_{34}\mathcal{P}_{34} = 0.$$

Nous retrouvons encore la réduction de la forme bilinéaire à la forme canonique.

A l'égard de cette dernière question, faisons en passant quelques remarques.

MM. Jordan et Kronecker ont considéré le problème général suivant :

Étant donné un polynôme bilinéaire

$$P = \Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n;\ \beta = 1, 2, \ldots, n),$$

on propose de le ramener à la forme canonique

$$P = \lambda_1 \xi_1 \eta_1 + \lambda_2 \xi_2 \eta_2 + \ldots + \lambda_n \xi_n \eta_n$$

par des substitutions orthogonales opérées l'une sur les variables $x_1, \ldots, x_n$, l'autre sur les variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Le résultat de M. Jordan peut être présenté sous une forme qui en rend la démonstration presque intuitive et qui facilite l'étude des cas particuliers; c'est la suivante :

Le problème revient à déterminer deux substitutions orthogonales qui, appliquées respectivement aux deux formes quadratiques

$$\sum \left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2 \quad \text{et} \quad \sum \left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)^2,$$

les réduisent à des sommes de carrés.

Dans le cas où l'on a, pour toutes les valeurs des indices i et j,

$$a_{ii} = 0, \qquad a_{ij} = -a_{ji},$$

le polynôme bilinéaire considéré est de la forme

$$P = \tfrac{1}{2}\Sigma a_{ik} p_{ik},$$

en posant

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i.$$

Les formes quadratiques $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)^2$ et $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2$ sont identiques, et la

réduction à la forme canonique peut être opérée au moyen d'une *même* substitution orthogonale effectuée sur les x et sur les y.

On peut, de plus, énoncer la proposition suivante :

Le premier membre de l'équation en s relative à la forme bilinéaire $\frac{1}{2}\Sigma a_{ik}p_{ik}$, considérée comme forme quadratique des $2n$ variables $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, est un carré parfait. Cette équation ne contient que des puissances paires de la variable, et l'équation transformée en $-s^2$ est l'équation en s relative à la forme quadratique $\sum\left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2$ des n variables $x_1, \ldots, x_n$.

Considérons le cas où l'on a $n = 4$. L'équation en s relative à la forme bilinéaire est alors

$$(s^4 - Is^2 + J)^2 = 0,$$

où I et J ont la même signification que précédemment.

L'équation en s relative à la forme quadratique $\sum\left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2$ sera

$$(s^2 + Is + J)^2 = 0.$$

Revenons au système K_2 de doubles points : nous avons étudié jusqu'ici le cas général; supposons maintenant que l'on ait $J = 0$, c'est-à-dire que le complexe linéaire de droites soit spécial.

L'axe du complexe linéaire spécial sera ou ne sera pas une génératrice de la sphère.

Dans la première hypothèse, l'un des points du double point sera situé sur une droite isotrope déterminée.

Plaçons-nous maintenant dans la seconde hypothèse, et appelons *foyers* d'un double point situé sur une sphère les deux points cercles de cette sphère qui passent par le double point.

La condition $J = 0$ exprimera que tous les doubles points du système K_2 peuvent être réunis par un cercle à un double point fixe (a_1, a_2) ou, si l'on veut, que les doubles points sont en involution avec un double point fixe (b_1, b_2); b_1, b_2 sont les foyers de (a_1, a_2), et a_1, a_2 les foyers de (b_1, b_2).

Système K_2.

Les doubles points sont en involution avec deux doubles points fixes, ou encore les doubles points peuvent être réunis par des cercles à deux doubles points fixes.

Les foyers des doubles points du système forment également un système K_2.

Système K_1.

Les doubles points sont distribués sur une courbe; nous avons deux définitions de cette courbe : on peut considérer et d'une infinité de manières le système comme en involution avec trois doubles points fixes; on peut dire aussi : les doubles points peuvent être réunis par des cercles à trois doubles points fixes. La même conclusion a lieu pour les foyers des doubles points.

Si nous considérons maintenant les droites des doubles points, elles appartiennent à trois complexes linéaires et sont réparties sur une quadrique; la courbe est donc une cyclique.

La première définition de la courbe nous donne pour la cyclique une construction par points qui a été signalée par M. Saltel [1].

La génération de la cyclique apparaît comme l'analogue de la génération de l'hyperboloïde à une nappe; d'ailleurs, ce n'est qu'une confirmation de cette remarque de M. Darboux [2] :

Puisque les cycliques sphériques sont l'intersection d'une sphère et d'un cône du second degré, leurs propriétés pourront se déduire de celles des surfaces du second degré.

Établissons, en effet, cette génération des cycliques en partant de leur définition. Considérons une surface du second degré passant par la courbe; celle-ci est rencontrée par chacune des génératrices de la surface en deux points; soient trois génératrices de même système rencontrant la courbe respectivement en m', n'; m'', n''; m''', n''', et concevons la quadrique comme engendrée par le mouvement d'une droite qui s'appuie sur $m'n'$, $m''n''$, $m'''n'''$. Les extrémités m, n de cette droite, situées sur la cyclique, seront sur un même cercle avec m', n'; de même, avec m'', n'' et m''', n'''; la génération de la cyclique apparaît clairement.

---

(1) Saltel, *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. III.

(2) Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, p. 33.

...fit de se donner une génératrice *mn* ...oints quelconques de la cyclique; le ...t par une génératrice *mn* sera tan-... cône circonscrit à la surface; donc :

...tion, tous les grands cercles mn sont ...: tous les grands cercles m′n′, ... sont ...que.

...point (m, n); ils sont situés sur un ...$n \cdot n'$); le lieu de ces foyers est donc une

...s que celui qui est perpendiculaire à mn ... conique.

... à Laguerre (¹).

Système K_0.

...stème sont déterminés par l'intersection de ... les points étrangers à la question, au nombre ...rs, c'est-à-dire deux doubles points; cette con-... les formules algébriques.
...uence, qui nous sera utile :

...points qui peuvent être réunis par des cercles ...st égal à deux.

... Les dix coordonnées p_{ik} du cercle.

...ordonnées pentasphériques déterminé par cinq ...x à deux S_1, S_2, S_3, S_4, S_5; en désignant par x_1, ...onnées d'un point de l'espace, toute sphère est re-...ation linéaire

$$\Sigma a_i x_i = 0,$$

(¹) ... *sur l'emploi des imaginaires dans la Géométrie de l'espace* ... *Mathématiques*, 2ᵉ série, t. XI, 1872).

et un cercle sera défini comme l'intersection de deux sphères

$$\Sigma a_i x_i = 0, \qquad \Sigma b_i x_i = 0.$$

Posons

$$p_{ik} = a_i b_k - a_k b_i,$$

en sorte qu'on a

$$p_{ii} = 0, \qquad p_{ik} = -p_{ki}.$$

Les quantités p_{ik}, au nombre de dix seulement, si l'on tient compte de ces dernières relations, seront les coordonnées du cercle considéré. Ces quantités vérifient les relations

$$\Omega_1 = 0, \qquad \Omega_2 = 0, \qquad \Omega_3 = 0, \qquad \Omega_4 = 0, \qquad \Omega_5 = 0,$$

en convenant de la notation suivante employée par M. Kœnigs. Soient α, β, γ, δ, ε les cinq premiers nombres écrits dans l'ordre de permutation naturelle 1, 2, 3, 4, 5 *à partir* de l'un d'eux que nous appelons α; nous posons

$$\Omega_\alpha(p) = \Omega_\alpha = p_{\beta\gamma} p_{\delta\varepsilon} + p_{\beta\delta} p_{\varepsilon\gamma} + p_{\beta\varepsilon} p_{\gamma\delta}.$$

Réciproquement, si des quantités p_{ik} vérifient à la fois les relations $p_{ii} = 0$, $p_{ik} = -p_{ki}$ et $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$, $\Omega_3 = 0$, $\Omega_4 = 0$, $\Omega_5 = 0$, ces quantités sont les coordonnées d'un cercle dans l'espace.

Lorsque le cercle sera rapporté à un système de coordonnées cartésiennes, la formation des quantités p_{ik} n'offrira aucune difficulté, en tenant compte des formules qui permettent de passer des coordonnées pentasphériques aux coordonnées cartésiennes; on aura souvent avantage à employer le système bien connu ([1]) de coordonnées pentasphériques qu'on obtient en considérant les trois faces d'un trièdre trirectangle et deux sphères orthogonales entre elles et ayant pour centre commun le sommet du trièdre. Les formules de transformation sont alors

$$\rho x_1 = x, \qquad \rho x_2 = y, \qquad \rho x_3 = z,$$
$$2\rho x_4 = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad 2i\rho x_5 = x^2 + y^2 + z^2 + 1,$$

et, si l'on considère un cercle défini par les équations

$$\alpha x + \beta y + \gamma - z = 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + c = 0,$$

([1]) DARBOUX, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, p. 137.

on aura

$$\begin{aligned} p_{12} &= \alpha b - \beta a, & p_{13} &= a,\\ p_{14} &= \alpha - (\alpha c - \gamma a), & p_{15} &= i[\alpha + (\alpha c - \gamma a)],\\ p_{23} &= b, & p_{24} &= \beta - (\beta c - \gamma b),\\ p_{25} &= i[\beta + (\beta c - \gamma b)], & p_{34} &= c - 1,\\ p_{35} &= -i(c+1), & p_{45} &= -2i\gamma. \end{aligned}$$

Si l'on envisage le Tableau

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \end{vmatrix},$$

les quantités p_{ik} sont des combinaisons linéaires des éléments de ce Tableau et des déterminants que l'on peut en déduire.

Les dix quantités p_{ik} doivent satisfaire à trois relations distinctes; les cinq équations

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = 0, \quad \Omega_4 = 0, \quad \Omega_5 = 0$$

ne sont donc pas distinctes.

Étudions ce système d'équations.

Étant données dix quantités quelconques p_{ik} vérifiant les relations $p_{ii} = 0$, $p_{ik} = -p_{ki}$, on a les identités qu'on obtient en faisant $i = 1, 2, 3, 4, 5$ dans la suivante :

$$p_{i1}\Omega_1 + p_{i2}\Omega_2 + p_{i3}\Omega_3 + p_{i4}\Omega_4 + p_{i5}\Omega_5 = 0.$$

Cela posé, désignons par $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \alpha_{44}, \alpha_{55}$ cinq quantités arbitraires et considérons le système d'équations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + p_{12}x_2 + p_{13}x_3 + p_{14}x_4 + p_{15}x_5 &= 0,\\ p_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + p_{23}x_3 + p_{24}x_4 + p_{25}x_5 &= 0,\\ p_{31}x_1 + p_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 + p_{34}x_4 + p_{35}x_5 &= 0,\\ p_{41}x_1 + p_{42}x_2 + p_{43}x_3 + \alpha_{44}x_4 + p_{45}x_5 &= 0,\\ p_{51}x_1 + p_{52}x_2 + p_{53}x_3 + p_{54}x_4 + \alpha_{55}x_5 &= 0. \end{aligned}\right.$$

Le déterminant de ce système est égal à

$$\begin{aligned} &\Omega_1^2\alpha_{11} + \Omega_2^2\alpha_{22} + \Omega_3^2\alpha_{33} + \Omega_4^2\alpha_{44} + \Omega_5^2\alpha_{55}\\ &\quad + p_{45}^2\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \ldots\\ &\quad + \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}\alpha_{44}\alpha_{55}. \end{aligned}$$

Supposons $p_{45} \neq 0$ et établissons entre les p_{ik} les trois relations

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = 0.$$

Envisageons le système d'équations que l'on déduit du système (1) en faisant *les hyp*othèses suivantes :

$$\alpha_{44} = 0, \quad \alpha_{55} = 0, \quad \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} \neq 0.$$

On a une solution de ce nouveau système en posant

$$x_1 = \Omega_1, \quad x_2 = \Omega_2, \quad x_3 = \Omega_3, \quad x_4 = \Omega_4, \quad x_5 = \Omega_5.$$

Le déterminant du système étant égal à

$$p_{45}^2 \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}$$

n'est pas nul; donc on a nécessairement

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = 0, \quad \Omega_4 = 0, \quad \Omega_5 = 0.$$

Ainsi, si p_{45} n'est pas nul, on a

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = 0, \quad \Omega_4 = 0, \quad \Omega_5 = 0$$

comme conséquences de

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = 0.$$

Nous pouvons déduire de cette proposition la démonstration du théorème suivant, énoncé par M. Stéphanos [1].

L'ordre du système d'équations qui relient entre eux les dix déterminants $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ du Tableau

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{vmatrix}$$

est égal à cinq.

En effet, nous avons entre les dix quantités p_{ik} les cinq relations

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = 0, \quad \Omega_4 = 0, \quad \Omega_5 = 0,$$

qui se réduisent à trois.

---

[1] CYPARISSOS STÉPHANOS, *Sur une configuration remarquable de cercles dans l'espace* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XCIII, p. 578; 1881).

Adjoignons six relations linéaires homogènes

$$P_1 = 0, \qquad P_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad P_6 = 0.$$

Nous pouvons supposer que, pour chacun des systèmes de solutions, on ait $p_{45} \neq 0$. Les p_{ik} seront alors déterminés par les équations

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = 0, \quad P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = 0, \quad \ldots, \quad P_6 = 0.$$

Le nombre des solutions de ce système d'équations est égal à huit. Parmi ces solutions, il en existe trois qui ne conviennent pas à la question ; en effet, on a des solutions particulières de ce système données par les équations

$$p_{45} = 0, \qquad p_{24}p_{53} + p_{25}p_{34} = 0, \qquad p_{34}p_{51} + p_{35}p_{14} = 0, \qquad p_{41}p_{25} + p_{42}p_{51} = 0,$$
$$P_1 = 0, \qquad P_2 = 0, \qquad P_3 = 0, \qquad \ldots, \qquad P_6 = 0.$$

Cela résulte de ce que la deuxième, la troisième et la quatrième de ces dernières équations ne sont pas distinctes.

Le nombre de ces solutions particulières est égal à trois ; on a donc trois solutions étrangères : ce sont, d'ailleurs, les seules solutions étrangères et le théorème est démontré.

On connaît la propriété du système de coordonnées pentasphériques par rapport à l'inversion : on peut dire que les coordonnées pentasphériques x_i demeurent invariables, pourvu que l'on rapporte la nouvelle figure aux sphères orthogonales qui sont les figures inverses des sphères coordonnées primitives. Il est clair que le système de coordonnées p_{ik} jouira de la même propriété. Les formules permettant de passer des coordonnées d'un cercle aux coordonnées du cercle inverse, ou, plus généralement, les formules de transformation des coordonnées seront linéaires et constitueront une substitution orthogonale. On conçoit donc tout l'avantage qui s'attache à définir les systèmes de cercles par des équations homogènes entre les coordonnées p_{ik}.

Si toutes les équations sont linéaires, on aura des *systèmes linéaires* de cercles que nous pourrons représenter, avec M. Kœnigs, par les symboles A_5, A_4, A_3, A_2, A_1, A_0, l'indice indiquant l'indétermination du système.

La figure inverse d'un système linéaire A_i, par rapport à un point quelconque de l'espace, sera un nouveau système linéaire A_i.

ons de démontrer, résulte

:

ire **de droites dans l'étude**
..ires **de cercles.**

eme A_5.

n pouvait, par une même substitution or-
sur les b_k, ramener à une forme canonique

$(i=1, 2, \ldots, n;\ k=1, 2, \ldots, n)$.

impair, l'équation en s relative à la forme bili-
forme quadratique des variables a_i et b_k, admet
sulte de ce que tout déterminant gauche de degré
.t donc déterminer, *a priori*, une substitution ortho-
le nouveau polynôme bilinéaire,

$$\Sigma A_{ik}(A_i B_k - A_k B_i),$$

prennent que les valeurs 1, 2, 3, ..., $(n-1)$.
ons à n la valeur $n=5$ pour toute substitution orthogonale
.t

$$A_5 = \sum_1^5 \Omega_i(a) a_i, \qquad B_5 = \sum_1^5 \Omega_i(a) a_i,$$

forme bilinéaire ne contiendra pas les variables A_5 et B_5; cette
de la forme bilinéaire peut s'énoncer géométriquement.
.n système A_5, défini par l'équation linéaire

$$\Sigma a_{ik} p_{ik} = 0.$$

naçons-nous dans le cas général et considérons la sphère

$$\sum_1^5 \Omega_i(a) x_i = 0;$$

c'est la *sphère centrale* K de M. Kœnigs.

Rapportons la figure à un nouveau système de coordonnées dans lequel la sphère S_5 sera la sphère centrale. Le système Λ_5 sera défini par une nouvelle équation linéaire

$$\Sigma A_{ik} P_{ik} = 0,$$

et l'on aura

$$A_{15} = 0, \qquad A_{25} = 0, \qquad A_{35} = 0, \qquad A_{45} = 0.$$

Interprétons géométriquement le fait algébrique de l'évanouissement des coefficients A_{15}, A_{25}, A_{35}, A_{45}.

Considérons un cercle (p) dont les coordonnées sont $p_{12}, p_{13}, \ldots, p_{45}$, et le double point d'intersection de ce cercle avec l'une des sphères coordonnées, par exemple avec $x_5 = 0$. Si l'on rapporte les points de cette sphère S_5 aux quatre cercles coordonnés C_1, C_2, C_3, C_4, qui sont les cercles d'intersection de S_5 avec les sphères S_1, S_2, S_3, S_4, les coordonnées du double point considéré sont

$$p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}.$$

L'équation $\Sigma A_{ik} P_{ik} = 0$ ne contient pas P_{15}, P_{25}, P_{35}, P_{45}; c'est donc une relation linéaire et homogène entre les coordonnées du double point d'intersection du cercle (p) avec la sphère K, et nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Étant donné le système Λ_5 *le plus général, il existe une sphère* K *et un complexe linéaire de droites* L *qui jouissent de la propriété suivante : la droite du double point d'intersection d'un quelconque des cercles du système avec la sphère* K *engendre un complexe, et ce complexe est* L.

La réciproque est évidemment vraie :

Les cercles qui coupent une sphère fixe K *en un double point dont la droite engendre un complexe linéaire constituent un système* Λ_5 *de cercles.*

Afin d'étudier les cas particuliers qui peuvent se présenter, nous reprendrons la démonstration du théorème précédent en suivant une autre voie.

Déterminons un système de coordonnées pentasphériques en posant

$$\rho x_1 = x, \qquad \rho x_2 = y, \qquad \rho x_3 = z, \qquad 2\rho x_4 = x^2 + y^2 + z^2 - 1,$$
$$2 i \rho x_5 = x^2 + y^2 + z^2 + 1.$$

$$x_2 + k_3 x_3 + k_4 x_4 + k_5 x_5 = 0,$$

$\neq 0$, c'est-à-dire que la sphère que nous

... équations

$$x_5 = 0,$$
$$= 0,$$

... les points d'intersection de

$$- k_2(a_4 - ia_5)]y$$
$$- k_3(a_4 - ia_5)]z + i(k_5 a_4 - k_4 a_5) = 0,$$
$$b_4 - k_4 b_5) = 0.$$

... les coordonnées pluckériennes ϖ_{ik} de cette ... mules

$$\ldots) p_{12} - k_1(p_{42} - ip_{52}) - k_2(p_{14} - ip_{15}),$$
$$ik_5) p_{13} - k_1(p_{43} - ip_{53}) - k_3(p_{14} - ip_{15}),$$
$$- ik_5) p_{23} - k_2(p_{43} - ip_{53}) - k_3(p_{24} - ip_{25});$$
$$k_5 p_{14} - k_4 p_{15} + k_1 p_{45}),$$
$$i(k_5 p_{24} - k_4 p_{25} + k_2 p_{45}),$$
$$i(k_5 p_{34} - k_4 p_{35} + k_3 p_{45}).$$

... que cette droite fait partie du complexe linéaire représenté ... tion

$$\Sigma \alpha_{ik} \varpi_{ik} = 0;$$

... ouve que le cercle qui détermine cette droite fait partie du système A_5, ... ni par l'équation

$$\Sigma a_{ik} p_{ik} = 0,$$

où l'on pose

$$\lambda a_{12} = \alpha_{12}(k_4 - ik_5), \qquad \lambda a_{24} = -\alpha_{23} k_3 + i\alpha_{24} k_5 + \alpha_{12} k_1,$$
$$\lambda a_{13} = \alpha_{13}(k_4 - ik_5), \qquad \lambda a_{25} = i\alpha_{23} k_3 - i\alpha_{24} k_4 - i\alpha_{12} k_1,$$
$$\lambda a_{14} = -\alpha_{12} k_2 - \alpha_{13} k_3 + i\alpha_{14} k_5, \qquad \lambda a_{34} = \alpha_{13} k_1 + \alpha_{23} k_2 + i\alpha_{34} k_5,$$
$$\lambda a_{15} = i\alpha_{12} k_2 + i\alpha_{13} k_3 - i\alpha_{14} k_4, \qquad \lambda a_{35} = -i\alpha_{34} k_4 - i\alpha_{13} k_1 - i\alpha_{23} k_2,$$
$$\lambda a_{23} = \alpha_{23}(k_4 - ik_5), \qquad \lambda a_{45} = i\alpha_{14} k_1 + i\alpha_{24} k_2 + i\alpha_{34} k_3.$$

Ce que l'on peut écrire, puisque $k_4 - ik_5$ n'est pas nul,

$$(1)\quad \begin{cases} \phantom{a_{21}k_1+{}} a_{12}k_2 + a_{13}k_3 + a_{14}k_4 + a_{15}k_5 = 0, \\ a_{21}k_1 \phantom{{}+a_{12}k_2} + a_{23}k_3 + a_{24}k_4 + a_{25}k_5 = 0, \\ a_{31}k_1 + a_{32}k_2 \phantom{{}+a_{13}k_3} + a_{34}k_4 + a_{35}k_5 = 0, \\ a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3 \phantom{{}+a_{14}k_4} + a_{45}k_5 = 0, \\ a_{51}k_1 + a_{52}k_2 + a_{53}k_3 + a_{54}k_4 \phantom{{}+a_{15}k_5} = 0; \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \mu\alpha_{12} = a_{12}, \\ \mu\alpha_{13} = a_{13}, \\ \mu\alpha_{23} = a_{23}; \\ \mu\alpha_{14} = -(a_{14} - ia_{15}), \\ \mu\alpha_{24} = -(a_{24} - ia_{25}), \\ \mu\alpha_{34} = -(a_{34} - ia_{35}). \end{cases}$$

Ceci posé, soit inversement un système A_3 de cercles défini par l'équation

$$\Sigma a_{ik}p_{ik} = 0.$$

Distinguons deux cas suivant que l'un des $\Omega_i(a)$ n'est pas nul, ou suivant que tous les $\Omega_i(a)$ sont nuls.

I. — *Un des $\Omega_i(a)$ n'est pas nul.*

Les équations (1) donnent une solution et une seule pour les quantités proportionnelles à $k_1, k_2, \ldots, k_5$,

$$k_1 = \nu\Omega_1, \qquad k_2 = \nu\Omega_2, \quad \ldots, \quad k_5 = \nu\Omega_5.$$

Supposons d'abord que l'on ait $\Omega_4 - i\Omega_5 \neq 0$; il existe une sphère K et un complexe linéaire de droites qui déterminent le système A_3 de cercles. L'invariant du complexe est $\frac{1}{i}(\Omega_4 - i\Omega_5)$; le complexe n'est donc jamais spécial.

Supposons maintenant que l'on ait $\Omega_4 - i\Omega_5 = 0$; les équations (1) donnent encore

$$k_1 = \nu\Omega_1, \qquad k_2 = \nu\Omega_2, \quad \ldots, \quad k_5 = \nu\Omega_5,$$

mais on a $k_4 - ik_5 = 0$ et l'équation $k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_5x_5 = 0$ représente un plan; dans ce cas, la sphère centrale est un plan; ou bien ce plan est quelconque, ou bien c'est le plan de l'infini.

Si le plan est quelconque, il résulte de ce qui précède que les doubles

points d'intersection des cercles avec ce plan forment un système linéaire K_3 de doubles points dans ce plan. Le complexe défini par les équations (2) est singulier et son axe est dans le plan.

Si le plan est le plan de l'infini, les axes des cercles forment un complexe linéaire de droites ; cela résultera d'un calcul que nous ferons plus loin.

Ces deux cas singuliers, qui correspondent à l'hypothèse $\Omega_4 - i\Omega_5 = 0$, peuvent être présentés de la façon suivante :

Prenons la figure inverse du système Λ_5 général, le pôle d'inversion étant un point de la sphère centrale ; le nouveau système est encore un système Λ_5 et la sphère centrale correspondante se réduit au plan qui est la figure inverse de la sphère centrale primitive.

Considérons maintenant un système Λ_5 pour lequel on a $\Sigma\Omega_i^2 = 0$, c'est-à-dire pour lequel la sphère centrale est de rayon nul ; si l'on prend la figure inverse de ce système, le pôle d'inversion étant le centre de la sphère centrale, on obtient le système pour lequel les axes des cercles forment un complexe linéaire.

II. — *Tous les $\Omega_i(a)$ sont nuls.*

Les équations (1) donnent alors pour $k_1, k_2, \ldots, k_5$ un système triplement indéterminé de solutions ; il existera une infinité de sphères K pouvant servir à définir Λ_5, et ces sphères seront associées à un même complexe linéaire *spécial,* si l'une des quantités α_{ik}, qui sont déterminées par les formules (2), n'est pas nulle ; nous avons donc deux cas à distinguer :

1° *Un des α_{ik} n'est pas nul.*

Ou bien les cercles Λ_5 pourront être réunis à deux points fixes par des sphères, ou bien ils rencontreront une droite isotrope déterminée.

Ce résultat peut être établi directement ; M. Kœnigs a montré que, si deux cercles (p) et (p') sont en involution, on a

$$\Sigma p_{ij} p'_{ij} = 0.$$

Lorsque tous les $\Omega_i(a)$ sont nuls, les coefficients a_{ik} sont les coordonnées d'un cercle.

Si ce cercle n'est pas une droite isotrope, tous les cercles du système Λ_5 sont en involution avec un cercle fixe ; F et F′ étant les foyers de ce cercle fixe, chacun des cercles du système Λ_5 peut être relié par une sphère aux deux points fixes F et F′.

Si les quantités a_{ik} définissent une droite isotrope, les cercles du système Λ_5 rencontrent cette droite isotrope.

2° *Tous les α_{ik} sont nuls.*

Le système considéré contient toutes les droites de l'espace ; les plans de ces cercles passent tous par un point fixe.

La théorie des complexes linéaires de droites permet de déduire du théorème que nous avons établi diverses conséquences.

Remarquons tout d'abord la conclusion suivante :

Les cercles d'un système Λ_5 qui sont des droites forment un complexe linéaire de droites.

Cette proposition pourra être utilisée lorsqu'on considérera les cercles d'un système linéaire qui passent par un point fixe de l'espace ; car, si l'on effectue une inversion, en prenant le point pour pôle, les cercles considérés se transformeront dans les droites du système linéaire qui est l'inverse du système primitif.

Nous pouvons ainsi énoncer la proposition suivante :

Les cercles de Λ_5 qui passent par deux points sont situés sur une sphère.

Comme conséquence de la théorie des complexes linéaires, nous avons encore le théorème de M. Kœnigs, que nous énoncerons sous la forme suivante :

Les plans de tous les cercles du système Λ_5, qui coupent en deux points un cercle X *de la sphère centrale, passent par un même point* O *du plan de ce cercle* X.

Le point O est le foyer du plan du cercle X par rapport au complexe linéaire ; c'est le centre de la sphère que M. Kœnigs appelle *sphère conjuguée* des sphères passant par le cercle X.

Si le cercle X varie en passant par deux points fixes a, b, le point O qui lui correspond décrit une droite, conjuguée de ab par rapport au complexe linéaire.

Si le cercle X varie en passant par un point fixe a, le point O qui lui correspond décrit un plan qui a pour foyer le point a.

Considérons les sphères passant par un cercle quelconque C de l'espace ;

...rrespond un point O, centre de la sphère conjuguée. Le ... sphère centrale K en deux points a, b. Le lieu du point O ...juguée de ab par rapport au complexe linéaire. A chacune ...nsidérées correspond homographiquement un point O; le ...rmonique de quatre des sphères est égal au rapport anharmo... quatre points O correspondants. La droite, lieu du point O, ...lan du cercle en un point qui correspond à ce plan.

... a aucune difficulté à étudier la position du complexe linéaire par ... à la sphère centrale; ils auront, en général, quatre droites com...es; les cas particuliers sont manifestes; ils correspondent à certaines ...ations entre les invariants I et J que M. Kœnigs a découverts dans la ...cherche des sphères qui coïncident avec leurs conjuguées. Ces invariants s'introduisent également dans le problème, identique au fond au précédent, de la réduction de la forme bilinéaire $\Sigma a_{ik}(a_i b_k - a_k b_i)$ à la forme canonique, au moyen d'une même substitution orthogonale effectuée sur les variables a_i et b_k. L'équation en s relative à cette forme bilinéaire, considérée comme forme quadratique des a_i et des b_k, est

$$s^2(s^4 - Is^2 + J)^2 = 0$$

en posant

$$I = \xi(a),$$

$$J = \sum_i [\omega_i(a)]^2.$$

$\xi(a)$ est la forme adjointe de la forme $\Xi(p) = \Sigma p_{ij}^2$ et $\omega_1(a)$, $\omega_2(a)$, $\omega_3(a)$, $\omega_4(a)$, $\omega_5(a)$ sont les formes adjointes de $\Omega_1(p)$, $\Omega_2(p)$, ..., $\Omega_5(p)$.

La condition $J = 0$ exprime, en général, que la sphère centrale est de rayon nul; si de nouvelles relations sont adjointes, elle peut exprimer que la sphère centrale est le plan de l'infini.

Cherchons une interprétation de la condition $I = 0$; I étant un invariant, nous prendrons pour sphère S_5 la sphère centrale K; l'équation du système Λ_3 est

$$\Sigma A_{ik} P_{ik} = 0$$

et l'on a

$$A_{15} = A_{25} = A_{35} = A_{45} = 0.$$

L'équation

$$\Sigma A_{ik} \varpi_{ik} = A_{12}p_{12} + A_{13}p_{13} + A_{14}p_{14} + A_{23}p_{23} + A_{42}p_{42} + A_{34}p_{34} = 0,$$

où les ϖ_{ik} sont les coordonnées pluckériennes d'une droite, est celle du complexe linéaire L associé à la sphère k.

La sphère centrale ayant pour équation $x^2+y^2+z^2+1=0$, le complexe polaire réciproque de L, par rapport à cette sphère, a pour équation

$$A_{34}p_{12}+A_{42}p_{13}+A_{23}p_{14}+A_{14}p_{23}+A_{13}p_{42}+A_{12}p_{34}=0.$$

Écrivons que les deux complexes linéaires sont en involution ; il vient

$$\Sigma A_{ik}^2=0,$$

et l'on a cette conclusion :

La condition I $=0$ *exprime que le complexe linéaire* L *et son polaire réciproque par rapport à la sphère centrale* K *sont en involution.*

Arrivons à la recherche des cercles singuliers et de la surface de singularités du système A_5.

D'une façon générale, si l'on prend pour les six coordonnées $u_1, u_2, \ldots, u_6$ du cercle les coefficients α, β, γ, a, b, c dans les équations

$$\begin{gathered}\alpha x+\beta y+\gamma-z=0,\\ x^2+y^2+z^2+ax+by+c=0,\end{gathered}$$

les cercles singuliers et la surface de singularités d'un système quintuplement indéterminé, défini par l'équation

$$\theta(\alpha,\beta,\gamma,a,b,c)=0,$$

seront déterminés par l'adjonction du système d'équations

$$\frac{\dfrac{\partial\theta}{\partial\alpha}}{x}=\frac{\dfrac{\partial\theta}{\partial\beta}}{y}=\frac{\partial\theta}{\partial\gamma},$$
$$\frac{\dfrac{\partial\theta}{\partial a}}{x}=\frac{\dfrac{\partial\theta}{\partial b}}{y}=\frac{\partial\theta}{\partial c}.$$

Cela résulte d'un calcul fait dans la recherche du système adjoint de première espèce.

Si l'on se place dans le cas du système A_5 général et si l'on prend son équation sous la forme canonique, le système de coordonnées pentasphé-

conjuguées des différentes sphères passant par C est une génératrice de la quadrique Σ de même système que D_1 et D_2. On peut déterminer une valeur de λ, telle que l'équation $P_1 + \lambda P_2 = 0$ soit vérifiée par les coordonnées du cercle C. A cette valeur de λ correspond la seconde génératrice de la quadrique Σ, située dans le plan du cercle C, et qui rencontre ce cercle en a_1 et a_2.

A chaque sphère S correspond homographiquement une droite O_1O_2. Soient ω_1, ω_2 les points d'intersection de S et de O_1O_2. Si l'on remarque qu'au plan du cercle correspond la droite $\alpha\beta$, on a immédiatement cette conclusion : le lieu des points ω_1, ω_2 est une cyclique qui passe par les points a_1, a_2, et le théorème est démontré.

De ce qui précède résulte également que :

L'enveloppe des plans des cercles de Λ_4 qui rencontrent C en deux points est la quadrique déterminée par la cyclique et la droite a_1a_2.

Si l'on suppose que le cercle C varie en passant par deux points fixes, le lieu des cycliques que l'on associe à chaque cercle sera la surface de singularités du complexe de cercles défini par les équations $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$, et par la condition que les cercles soient réunis par des sphères à deux points fixes.

Ce qui précède ne s'applique pas lorsque C est un cercle de Λ_4. Dans ce cas, toutes les droites, telles que D_1, D_2, sont situées dans le plan de ce cercle; O_1 et O_2 tracent sur D_1 et D_2 des divisions homographiques et la droite O_1O_2 enveloppe une conique tangente à toutes les droites, telles que D_1 et D_2.

Le système Λ_4 étant déterminé par l'intersection de deux systèmes Λ_5, considérons un système Λ_5 du faisceau

$$\alpha P_1 + \beta P_2 = 0.$$

La sphère centrale correspondante a pour équation

$$(k) \qquad \sum_1^5 \Omega_i(\alpha a + \beta b) x_i = 0.$$

Lorsque le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ varie, elle enveloppe la surface de singularités de Λ_4. L'équation de cette dernière s'obtient donc en égalant à zéro le discriminant de la forme quadratique des deux variables α et β, constituée par le

Système Λ_4.

Soit un système Λ_4, défini par deux équations linéaires

$$P_1 = \Sigma a_{ik} p_{ik} = 0,$$
$$P_2 = \Sigma b_{ik} p_{ik} = 0.$$

Les cercles situés sur une sphère passent tous par deux points A *et* B *de cette sphère.*

En effet, en vertu de $P_1 = 0$, les plans des cercles de Λ_4, situés sur la sphère S, passent par un même point O_1. En vertu de $P_2 = 0$, ils passent par un même point O_2; donc les cercles passent par les deux points d'intersection A et B de S avec la droite $O_1 O_2$.

Les cercles de Λ_4 qui sont des droites forment une congruence linéaire de droites.

Il en résulte que :

Tous les cercles de Λ_4 qui passent par un point P de l'espace rencontrent, chacun en un second point, deux cercles passant par le point P.

Il n'y a qu'un cercle de Λ_4 passant par deux points quelconques.

Soit un cercle quelconque C; établissons la proposition suivante :

Tous les cercles de Λ_4 qui rencontrent C *en deux points rencontrent également en deux points une cyclique qui passe par deux points de* C.

En effet, considérons une sphère quelconque S passant par le cercle C. A cette sphère correspondent, dans les deux systèmes $P_1 = 0$ et $P_2 = 0$, deux sphères conjuguées. Soient O_1 et O_2 leurs centres. Si l'on fait varier la sphère S, O_1 et O_2 décrivent deux droites D_1 et D_2 et tracent sur ces deux droites des divisions homographiques; les droites O_1, O_2 sont donc les génératrices d'une même système d'une quadrique Σ. Il existe une des génératrices $\alpha\beta$ de ce système, qui est située dans le plan du cercle C.

Tous les cercles du système Λ_4 appartiennent au système Λ_5, défini par l'équation

$$P_1 + \lambda P_2 = 0,$$

où λ peut prendre une valeur quelconque. Le lieu des centres des sphères

… le point P varie, la cyclide correspondante, qui dépend de trois …res, a néanmoins une enveloppe qui est la surface de singularités du …me Λ_3.

En considérant cette surface de singularités comme l'enveloppe des sphères centrales des systèmes Λ_5 du réseau

$$\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = 0,$$

on obtient immédiatement son équation : il suffit d'annuler le discriminant de la forme quadratique $\sum_1^5 \Omega_i(\alpha a + \beta b + \gamma c) x_i$ des trois variables α, β, γ, et il vient ainsi

$$\begin{vmatrix} 2\Sigma\Omega_i(a)x_i & \Sigma\Omega_i(a,b)x_i & \Sigma\Omega_i(a,c)x_i \\ \Sigma\Omega_i(b,a)x_i & 2\Sigma\Omega_i(b)x_i & \Sigma\Omega_i(b,c)x_i \\ \Sigma\Omega_i(c,a)x_i & \Sigma\Omega_i(c,b)x_i & 2\Sigma\Omega_i(c)x_i \end{vmatrix} = 0.$$

C'est une surface du sixième degré, admettant le cercle imaginaire de l'infini comme ligne triple.

A chacune des sphères centrales du réseau correspond un complexe linéaire de droites; ces complexes linéaires forment une famille à trois termes et ont en commun les droites qui appartiennent au système Λ_3.

Système Λ_4.

La congruence linéaire de cercles est définie par les équations linéaires

$$P_1 = \Sigma a_{ik} p_{ik} = 0, \qquad P_2 = \Sigma b_{ik} p_{ik} = 0, \qquad P_3 = \Sigma c_{ik} p_{ik} = 0, \qquad P_4 = \Sigma d_{ik} p_{ik} = 0.$$

M. Stephanos a énoncé le théorème suivant :

Il y a dans l'espace cinq couples de points pouvant être réunis par des sphères à chacun des cercles C *d'une congruence linéaire. Ces cinq couples de points sont les foyers de cinq cercles formant un pentacycle.*

M. Kœnigs en a donné la démonstration qui suit :

Tout cercle de la congruence vérifie l'équation

$$\Sigma A_{ik} p_{ik} = 0,$$

en posant

$$A_{ik} = \lambda a_{ik} + \mu b_{ik} + \nu c_{ik} + \rho d_{ik}$$

premier membre de l'équation (k); il vient ainsi

$$[\Sigma \Omega_i(a, b) x_i]^2 - 4 \left[\sum_1^5 \Omega_i(a) x_i\right] \left[\sum_1^5 \Omega_i(b) x_i\right] = 0,$$

en posant

$$\Omega_i(a, b) = \Omega_i(b, a) = \frac{1}{2} \sum_{\omega\rho} \frac{\partial \Omega_i(a)}{\partial a_{\omega\rho}} b_{\omega\rho}.$$

C'est une cyclide à deux points doubles.

A chacune des sphères centrales correspond un complexe linéaire de droites. Il résulte des formules que nous avons établies que ces complexes forment un faisceau; cela résulte aussi, d'ailleurs, de cette considération que, si l'on envisage les cercles de Λ_4 qui sont des droites, ce sont des droites de la congruence linéaire commune à deux quelconques des complexes linéaires et réciproquement.

Il existe deux valeurs de λ pour lesquelles le complexe linéaire de droites est spécial; les systèmes Λ_5 de cercles qui leur correspondent sont des systèmes pour lesquels la sphère centrale est un plan; donc :

Tout système Λ_4 peut être défini comme l'ensemble des cercles qui rencontrent deux plans suivant des doubles points engendrant respectivement dans chacun des plans des systèmes linéaires K_3 *de doubles points.*

Les plans passent respectivement par les directrices de la congruence linéaire commune aux complexes linéaires.

Système Λ_3.

Le complexe linéaire de cercles est défini par trois équations linéaires :

$$P_1 = \Sigma a_{ik} p_{ik} = 0, \qquad P_2 = \Sigma b_{ik} p_{ik} = 0, \qquad P_3 = \Sigma c_{ik} p_{ik} = 0.$$

Il n'y a qu'un cercle de Λ_3 sur une sphère quelconque de l'espace.

Les cercles du système Λ_3 qui sont des droites forment un système de génératrices d'une quadrique.

On en déduit la proposition suivante :

Les cercles du système Λ_3 qui passent par un point P *sont répartis sur une cyclide ayant pour point double le point* P.

sphère centrale du système

a un

par un cercle

conjuguées d'une

:

o.

, O_4 décrivent quatre
graphiques. Ces quatre
tions du point O_4 et, par

:

linéaire enveloppent une qua-

nt par une droite est le même que
droite en deux points. Ce dernier
voit en transformant par inversion.
nul du complexe U. Leurs centres sont
nce; le lieu de ces centres est la surface
r les coordonnées x_i du centre d'une des
on suivante

$$\Omega_i(\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d);$$

ont liés par la relation

$$[\Omega_i(\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d)]^2 = 0.$$

Les quantités A_{ik} sont assujetties simplement à six équations linéaires, par le fait de l'indétermination de λ, μ, ν, ρ. Si l'on veut que les A_{ik} soient les coordonnées d'un cercle, le problème sera déterminé, et l'on aura cinq solutions correspondant à cinq cercles formant un pentacycle; donc :

Les cercles d'une congruence linéaire sont en involution avec cinq cercles formant un pentacycle.

C'est un nouvel énoncé du théorème précédent.

Réciproquement, les cercles en involution avec quatre cercles forment une congruence linéaire et sont en involution avec un cinquième qui forme avec les premiers un pentacycle.

Sur une sphère quelconque de l'espace, il n'y a pas de cercle de la congruence. Les sphères qui passent par les cercles de la congruence forment ainsi un complexe U de sphères; cherchons l'équation qui détermine ce complexe.

Exprimons que le cercle d'intersection des deux sphères

$$\Sigma l_i x_i = 0, \qquad \Sigma \lambda_i x_i = 0$$

fait partie de la congruence.

Posons

$$l_i^1 = \sum_k a_{ik} l_k, \qquad l_i^2 = \sum_k b_{ik} l_k, \qquad l_i^3 = \sum_k c_{ik} l_{ik}, \qquad l_i^4 = \sum_k d_{ik} l_{ik},$$

il vient

$$\Sigma l_i^1 \lambda_i = 0, \qquad \Sigma l_i^2 \lambda_i = 0, \qquad \Sigma l_i^3 \lambda_i = 0, \qquad \Sigma l_i^4 \lambda_i = 0.$$

Considérons dans ces dernières équations les λ_i comme des inconnues; elles admettent, en général, la solution unique

$$\lambda_i = l_i.$$

Pour qu'il y ait un cercle de la congruence sur la sphère $\Sigma l_i x_i = 0$, il faut donc que ce système d'équations soit indéterminé, c'est-à-dire qu'on puisse déterminer λ, μ, ν, ρ, tels que l'on ait

$$\lambda l_i^1 + \mu l_i^2 + \nu l_i^3 + \rho l_i^4 = 0$$

pour toutes les valeurs de l'indice i.

cercles se coupent donc par groupes de six suivant les centres des dix sphères T.

Faisons d'abord quelques remarques :

M. Darboux a montré qu'en général il existe un cercle (K) et un seul qui rencontre trois cercles (A), (B), (C) de l'espace, chacun en deux points [1]. Appelons *centre radical de deux cercles* le centre radical de toutes les sphères passant par ces deux cercles. Le plan du cercle (K) est le plan des centres radicaux des trois cercles (A), (B), (C) pris deux à deux. Le problème est indéterminé dans le cas où deux de ces centres radicaux, et par suite les trois, sont confondus, et inversement, si le problème admet plusieurs solutions, les centres radicaux des trois cercles (A), (B), (C), pris deux à deux, sont confondus; les trois cercles (A), (B), (C) sont alors orthogonaux à une même sphère. Il est manifeste que les cercles (K) engendrent une surface qui n'est autre qu'une cyclide, et qu'inversement toute cyclide peut être engendrée par le mouvement d'un cercle rencontrant, chacun en deux points, trois cercles orthogonaux à une même sphère. Nous retrouvons la génération des cyclides due à M. Casey [2].

Revenons à la configuration (C); la sphère qui passe par les deux cercles o5 et 12 coupe la surface S_6 suivant un cercle C; de la définition de S_6 résulte qu'on peut trouver sur ce cercle C une infinité de couples de deux points pouvant être réunis par des sphères à o1, o2, o3, o4; je dis qu'il en résulte que C n'est autre que le cercle 34.

En effet, C doit rencontrer en deux points deux des cercles o1, o2, o3, o4, et admettre avec les autres le même centre radical; car, s'il n'en était pas ainsi, on en conclurait que trois de ces quatre cercles ont même centre radical; démontrons que C doit rencontrer en deux points o1 et o2.

Car, s'il rencontrait en deux points o3 et o4, rencontrant o5 en deux points, ce serait 12.

Si C rencontrait o1, o3 en deux points, rencontrant également o5 en deux points, ce serait 24; cette conclusion est également inadmissible; car 12 rencontre en deux points o3, o5 et o4; le cercle 24 rencontre en deux

---

(1) DARBOUX, *Sur une nouvelle définition de la surface des ondes* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XCII, p. 446-448).

(2) CASEY, *On cyclides and sphero-quartics* (*Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, t. CLXI, p. 585-721).

On a vu que les cercles de la congruence linéaire sont en involution avec cinq cercles formant un pentacycle. La surface S_6 pourra donc être définie comme le lieu des couples de points qui peuvent être réunis par des sphères à quatre des cercles de ce pentacycle. Il apparaît immédiatement que cette surface S_6 est du sixième degré et admet le cercle imaginaire de l'infini comme ligne triple.

La surface S_6 est définie par quatre quelconques des cinq cercles :

01	02	03	04	05

du pentacycle associé à la congruence linéaire.

Considérons quatre de ces cercles, par exemple 01, 02, 03, 04, et déterminons les quatre cercles 15, 25, 35, 45, dont chacun $i5$ rencontre, en deux points, trois oj, ok, ol des cercles donnés. Nous pourrons ainsi former le tableau :

01	02	03	04	05
21	12	13	14	15
31	32	23	24	25
41	42	43	34	35
51	52	53	54	45

qui comprend quinze cercles, en remarquant que ij est identique à ji.

Il est clair que ces quinze cercles sont situés sur la surface S_6.

La configuration (C) des quinze cercles de l'espace dont nous venons d'indiquer un mode de formation jouit de propriétés remarquables, énoncées par M. Stéphanos, et que nous allons établir :

Deux de ces cercles sont situés sur une même sphère toutes les fois que leurs symboles n'ont pas d'indice commun. Ainsi ils sont situés, trois à trois, sur quinze sphères.

Ces quinze cercles peuvent être groupés en six pentacycles 0, 1, 2, 3, 4, 5. *Les cercles appartenant à un même pentacycle ont des symboles ayant un indice commun.*

On peut former avec les cercles de la configuration (C) *vingt triples ijk renfermant trois cercles jk, ki, ij. Ces vingt triples se rangent à leur tour en dix couples* (*ijk*, *lmn*). *Les cercles de deux triples associés* (*ijk*, *lmn*) *sont orthogonaux à une même sphère* T. *Les plans des quinze*

par exemple; elle se compose de ce
foyer f d'un cercle de la con-
i sur S; les traces des cer-
s points qui peuvent
ouvons donc la

e génération

la surface, deux
s deux cercles fait
lide :
e; si par deux points,
onsidère les deux sphères
et coupant le cercle C aux
s décrivent une cyclide con-
oints P et Q.
uée par M. Saltel ([1]).
ouver une infinité de systèmes ser-

congruence linéaire de cercles. Rappe-
téphanos pour déterminer cette surface :
ne le lieu des couples de foyers des cercles

espace ne contient que deux pareils couples de

e points sont définis par la condition de pouvoir
ères à quatre cercles. Si l'on considère les traces
des quatre cercles sur la sphère, les doubles points
tre reliés aux quatre doubles points (a_1, b_1), (a_2, b_2), ...
existe donc deux pareils doubles points, ainsi que nous
e précédemment.
ces couples de foyers, M. Stéphanos énonce les propositions

ons les sphères v, telles que les deux couples de foyers situés sur

---

[1] ALTEL, *Sur les cyclides* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. III).

points o3, o5 et o1; par suite, 12 et 24 devant se rencontrer, on en conclurait que o3 et o5 seraient sur la même sphère.

Donc C rencontre en deux points o1, o2, o5, et admet même centre radical avec o3, o4; C est identique à 34.

Ainsi les trois cercles o5, 12, 34 sont sur une même sphère, et les trois cercles o3, o4, 34 ont même centre radical.

Deux cercles sont, par conséquent, sur une même sphère si leurs symboles n'ont pas d'indice commun.

Si l'on considère trois cercles *ij*, *jk*, *ki*, il y a plusieurs cercles rencontrant ces trois cercles en deux points; il y en a donc une infinité, et ces trois cercles ont même centre radical.

Remarquons que 12	rencontre en deux points les trois cercles	o4, o5, o3
23	»	o4, o5, o1
31	»	o4, o5, o2

On en conclut que les six cercles o4, o5, 45, 12, 23, 31 ont même centre radical; c'est le centre d'une sphère T.

Des résultats précédents résulte la construction donnée par M. Stéphanos du cinquième cercle o5 d'un pentacycle déterminé par quatre cercles o1, o2, o3, o4 de l'espace.

On construit d'abord les quatre cercles 15, 25, 35, 45, dont chacun (*i*5) rencontre en deux points trois (*oj*, *ok*, *ol*) des cercles donnés. Les sphères *oi*, *j*5 qui joignent les cercles *oi* aux cercles *j*5 sont au nombre de douze et se rangent en six couples :

o1, 25	o1, 35	o1, 45	o2, 35	o2, 45	o3, 45
o2, 15	o3, 15	o4, 15	o3, 25	o3, 25	o4, 35

Elles donnent ainsi six nouveaux cercles :

34	24	23	14	13	12

intersections des sphères des couples respectifs.

Ces nouveaux cercles sont situés, par couples de deux, sur trois sphères : 12.34, 13.24, 14.23.

Ces trois dernières sphères se coupent suivant un même cercle qui coïncide avec le cercle o5 cherché.

Revenons à la surface S_6; on l'a définie en partant d'un système de quatre cercles C_1, C_2, C_3, C_4; considérons la section de S_6 par une sphère $\dot{S}$ pas-

dixième degré, intersection de deux surfaces S_6 de M. Stephanos qui ont déjà en commun trois cercles et le cercle rencontrant ces trois cercles; d'autre part, les cercles du système A_1 sont en involution avec une infinité de cercles constituant eux-mêmes un système A_1; en sorte qu'il existe une infinité de couples de points, tels que a_1, b_1; a_2, b_2; ..., pouvant servir à la génération; tous ces points sont sur une courbe du dixième degré : nous verrons que cette courbe est une ligne double de la surface.

Ceci posé, nous établirons par des considérations géométriques que la surface est du dixième degré de la manière suivante :

Considérons la figure inverse en prenant pour pôle d'inversion le point b_1; on obtient une nouvelle surface cerclée définie de la façon suivante :

Les plans des cercles passent par un point fixe A_1, et les cercles peuvent être reliés par des sphères à quatre couples de points A_2, B_2; A_3, B_3; A_4, B_4; A_5, B_5.

Cherchons le degré de la section de cette nouvelle surface par le plan $A_1 A_2 B_2$; cette section comprend d'abord manifestement un cercle qu'on obtient en menant le cercle orthogonal à trois cercles du plan $A_1 A_2 B_2$; les points de la seconde branche de courbe peuvent être associés deux à deux; la droite les joignant passe par A_1. Soit une sécante issue de A_1 et cherchons le nombre des points d'intersection avec la courbe, c'est-à-dire cherchons les cercles qui rencontrent cette sécante en deux points; si O est le point d'intersection de la sécante avec $A_2 B_2$, la puissance de ce point par rapport à l'un des cercles considérés est OA_2, OB_2. Par suite, si l'on détermine respectivement sur OA_3 et sur OB_3 des points A'_3 et B'_3 par les relations

$$OA'_3 . OA_3 = OB'_3 . OB_3 = OA_2 . OB_2,$$

les quatre points A_3, B_3, A'_3, B'_3 sont sur un cercle qui rencontre en deux points l'un des cercles considérés. Opérant de même sur A_4, B_4 et A_5, B_5, on voit que les cercles rencontrent en deux points trois cercles ayant même centre radical; d'après le théorème de M. Casey, ils sont situés sur une cyclide qui est rencontrée par la sécante $A_1 O$ en quatre points; donc le degré de la branche de courbe est égal au nombre quatre augmenté de l'ordre de multiplicité du point A_1.

Or il y a deux cercles passant par A_1 et faisant partie du système linéaire; donc la section par le plan considéré est une courbe du huitième degré qui se compose d'un cercle et d'une courbe du sixième degré; le point A_1 est un point double de cette dernière et de la surface.

ces sphères coïncident; elles forment un complexe V; par chaque cercle de l'espace passent quatre sphères de ce complexe V; la surface Σ_8, lieu des centres des sphères de rayon nul contenues dans le complexe V est du huitième ordre; elle est touchée par chacune des dix sphères T tout le long d'une biquadratique; elle a le cercle imaginaire à l'infini pour ligne quadruple et admet pour points doubles les foyers des quinze cercles de la configuration (C).

La surface Σ_8 est manifestement la surface focale de la congruence linéaire de cercles.

Les théorèmes généraux que nous avons établis à l'égard des surfaces de singularités permettent d'écrire immédiatement l'équation de cette surface focale; il suffit d'égaler à zéro le discriminant de la forme quadratique

$$\sum_1^5 \Omega_i(\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d)x_i$$

des quatre variables α, β, γ, δ et l'on obtient ainsi

$$\begin{vmatrix} 2\Sigma\Omega_i(a)x_i & \Sigma\Omega_i(a,b)x_i & \Sigma\Omega_i(a,c)x_i & \Sigma\Omega_i(a,d)x_i \\ \Sigma\Omega_i(b,a)x_i & 2\Sigma\Omega_i(b)x_i, & \Sigma\Omega_i(b,c)x_i & \Sigma\Omega_i(b,d)x_i \\ \Sigma\Omega_i(c,a)x_i & \Sigma\Omega_i(c,b)x_i & 2\Sigma\Omega_i(c)x_i & \Sigma\Omega_i(c,d)x_i \\ \Sigma\Omega_i(d,a)x_i & \Sigma\Omega_i(d,b)x_i & \Sigma\Omega_i(d,c)x_i & 2\Sigma\Omega_i(x_i) \end{vmatrix} = 0.$$

Système Λ_1.

Les cercles de Λ_1 sont répartis sur une surface cerclée.

En général, cette surface est une surface du dixième degré, admettant le cercle imaginaire de l'infini comme ligne quintuple.

Plaçons-nous dans le cas le plus général. La surface est engendrée par un cercle dont le mouvement est défini en disant que ce cercle peut être relié par des sphères à cinq couples de points a_1, b_1; a_2, b_2; ...; a_5, b_5. Si l'on considère la surface inverse de la surface considérée en prenant pour pôle d'inversion un point quelconque de l'espace, la nouvelle surface est du même degré que la première, car elle est définie d'une façon identique.

Le degré de la surface est donc un nombre pair $2n$ et elle admet le cercle imaginaire de l'infini comme ligne d'ordre de multiplicité égal à n.

Remarquons que le lieu des foyers des cercles de Λ_1 est une courbe du

...ités permet d'écrire immédiatement
...rtis les cercles du système A_1

$$\Sigma c_{ik} p_{ik} = 0,$$

o;

... quadratique

$$\ldots + \varepsilon e) x_i$$

...ient ainsi :

$$\begin{vmatrix} \ldots x_i & \Sigma\Omega_i(a, d) x_i & \Sigma\Omega_i(a, e) x_i \\ \ldots x_i & \Sigma\Omega_i(b, d) x_i & \Sigma\Omega_i(b, e) x_i \\ \ldots x_i & \Sigma\Omega_i(c, d) x_i & \Sigma\Omega_i(c, e) x_i \\ \ldots d, c) x_i & 2\Sigma\Omega_i(d) x_i & \Sigma\Omega_i(d, e) x_i \\ \ldots e, c) x_i & \Sigma\Omega_i(e, d) x_i & 2\Sigma\Omega_i(e) x_i \end{vmatrix} = 0.$$

$$\ldots P_2 + \gamma P_3 + \delta P_4 + \varepsilon P_5 = 0,$$

... passant par le système A_1 considéré, renferme ...ère centrale correspondante peut donc coïncider ...e de l'espace ; étant donnée une sphère quelconque, ..., en la prenant pour une des sphères coordonnées, ...stème A_5, passant par A_1, pour lequel la sphère cen- ...cette sphère ; le complexe linéaire associé est déterminé ...ion suivante :

...partis sur la surface du dixième degré coupent une ...que en des doubles points dont les droites appartiennent ...e linéaire.

...me A_1 pourra être défini par cinq sphères arbitraires de l'espace, ...s on associera cinq complexes linéaires déterminés qui font partie ...mille de complexes linéaires à cinq termes.

...peut, en particulier, choisir cinq sphères qui ne soient pas des plans ...des que les complexes associés soient spéciaux ; c'est de cette propriété

Rappelons les formules qui sont relatives à l'inversion et qui ont été données par M. Moutard [1].

Soient m le degré d'une surface, p le degré de multiplicité du pôle, q le degré de multiplicité du cercle de l'infini et soient m', p', q' les nombres analogues pour la surface inverse; on a

$$\begin{aligned} m' &= 2m - p - 2q, & m &= 2m' - p' - 2q', \\ p' &= m - 2q, & p &= m' - 2q', \\ q' &= m - p - q, & q &= m' - p' - q'. \end{aligned}$$

Dans le cas présent, nous avons

$$m = 2q, \qquad p = 2, \qquad m' = 8.$$

Par suite,

$$m = m' + p = 10,$$
$$q = 5.$$

La surface sur laquelle sont répartis les cercles du système Λ_1 *est donc du dixième degré; le cercle imaginaire de l'infini est une ligne dont l'ordre de multiplicité est égal à cinq.*

Les points a_1, b_1, ... *sont situés sur une courbe du dixième degré qui est une ligne double de la surface.*

Le lieu des foyers des cercles, qui est également une courbe du dixième degré, est une focale de la surface.

La surface a été définie par le mouvement d'un cercle qui est en involution avec cinq cercles fixes; il est facile de voir que les cercles d'une même série de la cyclide sont aussi en involution avec cinq cercles.

En effet, considérons une cyclide et cinq cercles d'une même série; il existe une seconde série, telle que tous les cercles de cette série rencontrent les cinq cercles, chacun en deux points; sur chacun des cinq cercles, prenons deux points; on voit que les cercles de la seconde série sont en involution avec cinq cercles fixes; mais les cercles fixes ne sont pas arbitraires, comme il est aisé de s'en rendre compte.

Ainsi les cercles d'une même série d'une cyclide font partie d'un système Λ_1 *particulier.*

---

[1] Moutard, *Sur la transformation par rayons vecteurs réciproques* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1864).

$$2p_{34} = Z - p_{34},$$
$$2p_{35} = Z + p_{34}, \qquad 2ip_{45} = U.$$

$$+ ia_{35})\varpi_{34}$$
$$- a_{45} i U = 0.$$

hère cen-
forment un

t, les coordon-

coordonnées p_{ik};
quer, puis éliminant
ne entre les coordon-
e est démontré.

que nous avons déduit, par des considérations géométriques, le degré de la surface.

Dans certains cas particuliers, on pourra considérer les cercles comme assujettis à rencontrer une ou plusieurs droites isotropes.

Nous terminerons en établissant le théorème suivant :

Les génératrices de la surface réglée, formée par les axes des cercles qui font partie d'un système Λ_1, *appartiennent à un complexe linéaire de droites.*

Considérons un cercle et ses deux foyers dont les coordonnées pentasphériques seront

$$x'_1, \quad x'_2, \quad x'_3, \quad x'_4, \quad x'_5$$

et

$$x''_1, \quad x''_2, \quad x''_3, \quad x''_4, \quad x''_5.$$

Les équations du cercle seront

$$x'_1 x_1 + x'_2 x_2 + x'_3 x_3 + x'_4 x_4 + x'_5 x_5 = 0,$$
$$x''_1 x_1 + x''_2 x_2 + x''_3 x_3 + x''_4 x_4 + x''_5 x_5 = 0,$$

et l'on aura, pour déterminer les coordonnées du cercle,

$$\lambda p_{ik} = x'_i x''_k - x'_k x''_i.$$

Supposons que le système de coordonnées pentasphériques soit déterminé, en posant

$$\rho x_1 = x, \qquad \rho x_2 = y, \qquad \rho x_3 = z,$$
$$2\rho x_4 = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad 2i\rho x_5 = x^2 + y^2 + z^2 + 1.$$

Soient x', y', z' et x'', y'', z'' les coordonnées cartésiennes des deux foyers et posons

$$u' = x'^2 + y'^2 + z'^2, \qquad u'' = x''^2 + y''^2 + z''^2,$$

puis

$$\varpi_{14} = x' - x'', \qquad \varpi_{24} = y' - y'', \qquad \varpi_{34} = z' - z'',$$
$$\varpi_{23} = y'z'' - y''z', \qquad \varpi_{31} = z'x'' - z''x', \qquad \varpi_{12} = x'y'' - x''y',$$
$$x'u'' - x''u' = \mathrm{X}, \qquad y'u'' - y''u' = \mathrm{Y}, \qquad z'u'' - z''u' = \mathrm{Z}, \qquad u' - u'' = \mathrm{U}.$$

On peut alors prendre pour les coordonnées p_{ik} du cercle les valeurs

NOTE.

On a vu que le système Λ_5 jouit de la propriété fondamentale suivante :

Les cercles d'un système Λ_5, qui sont des droites, forment un complexe linéaire de droites.

Cette proposition devient intuitive, si l'on a égard aux considérations suivantes :

Considérons un cercle qui se réduit à une droite et cherchons les particularités qui affectent ses coordonnées. Si l'on se rappelle l'interprétation que nous avons donnée des six coordonnées p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}, dont les indices sont formés avec les seuls nombres 1, 2, 3, 4, on a immédiatement cette conclusion :

Les dix coordonnées p_{ik} d'un cercle qui se réduit à une droite sont des fonctions linéaires des six coordonnées pluckériennes de cette droite.

C'est sous une autre forme la propriété signalée du système Λ_5. Posons

$$P_j = \sum_{i=1}^{i=5} \frac{p_{ij}}{R_i},$$

R_i étant le rayon de la sphère $x_i = 0$.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un cercle (p) se réduise à une droite s'obtiennent en écrivant les cinq équations

$$P_1 = 0, \qquad P_2 = 0, \qquad P_3 = 0, \qquad P_4 = 0, \qquad P_5 = 0,$$

qui équivalent à deux relations entre les p_{ik}.

L'équation

$$P_j = 0$$

représente un système Λ_5, défini par cette condition que les plans de ses cercles passent par le centre de la sphère $x_j = 0$, et l'on a les propositions suivantes :

L'espace réglé est formé par les cercles communs aux cinq systèmes linéaires $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$, $P_4 = 0$, $P_5 = 0$, *tous ces cercles se réduisant à des droites.*

L'espace réglé est une des parties constitutives d'un système Λ_4, l'autre partie étant formée par les cercles dont les plans passent par une droite fixe.

·ule suivante

·, obtenu en écrivant

· space; les plans de ses cercles sont

· générale, si un système quintuplement
les droites de l'espace, il est défini par une
proquement.

SUR

L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

PAR M. A. LEGOUX.

Bien des méthodes ont été données pour intégrer l'équation d'Euler. La suivante, fondée sur des considérations de Mécanique rationnelle, ne paraîtra peut-être pas dépourvue d'intérêt.

Considérons toutes les surfaces dont l'élément linéaire est représenté par la formule

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Supposons que l'on cherche la figure d'équilibre d'un fil posé sur ces surfaces, et admettons que les forces qui sollicitent le fil en chacun de ses points soient telles qu'il existe une fonction potentielle U, cette fonction étant d'ailleurs une fonction quelconque de u et de v.

En appliquant la méthode de Jacobi, on trouve que la solution du problème dépend de la connaissance d'une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(1)\qquad \frac{G\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial v} + E\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2}{EG - F^2} = (U - h)^2,$$

h étant une constante arbitraire.

C'est une équation toute pareille à celle que l'on obtient en étudiant le mouvement d'un point sur une surface.

Soit V une intégrale complète contenant, outre la constante h, une nouvelle constante α. La figure d'équilibre du fil est donnée par les deux équations

$$(2)\qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha} = \beta,$$

$$(3)\qquad \frac{\partial V}{\partial h} - s = \gamma.$$

La première est l'équation de la courbe d'équilibre du fil, la seconde donne la longueur de l'arc.

Or on peut satisfaire à l'équation (2) d'une infinité de manières, en posant $u = f(\theta)$, θ étant un paramètre arbitraire et f une fonction quelconque. Il en résulte pour v une valeur correspondante $v = \varphi(\theta)$. En remplaçant u et v par ces valeurs dans l'équation (3), on aura s en fonction du même paramètre, et ces expressions s, u et v contiendront deux fonctions arbitraires, f et U des variables u et v.

L'équation (1) est l'équation aux dérivées partielles dont dépend la détermination d'une ligne quelconque tracée sur les surfaces. Si $U = 0$, c'est l'équation à laquelle Gauss a ramené la recherche des lignes géodésiques.

Intégration de l'équation $ds^2 = f^2\,du^2 + g^2\,dv^2 + k^2\,dw^2$. — On suppose que u, v, w sont les coordonnées curvilignes orthogonales d'un point de l'espace, ds représente la distance de deux points infiniment voisins.

Supposons que l'on cherche la figure d'équilibre d'un fil flexible et inextensible, dont chaque point est soumis à des forces telles qu'il existe une fonction potentielle U quelconque de u, v et w.

En appliquant la méthode de Jacobi, on trouve que la solution du problème dépend de la connaissance d'une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{1}{f^2}\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{g^2}\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2 + \frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial V}{\partial w}\right)^2 = (U - h)^2.$$

Soit V une intégrale complète contenant, outre la constante h, deux nouvelles constantes a et b, on a pour déterminer la figure d'équilibre du fil les équations

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \alpha, \qquad \frac{\partial V}{\partial b} = \beta, \qquad \frac{\partial V}{\partial h} - s = \gamma.$$

Si maintenant on pose $u = f(\theta) =$ fonction arbitraire d'un paramètre θ, les deux premières donnent v et w en fonction de θ; la troisième fournira la valeur de s.

On aura ainsi exprimé u, v, w, s en fonction d'un seul paramètre θ, et il entrera dans ces expressions deux fonctions arbitraires f et U.

DE L'INFLUENCE

DU

CHOC SUR L'AIMANTATION RÉSIDUELLE

D'UN BARREAU DE NICKEL,

PAR M. G. BERSON,

Professeur de Physique à la Faculté des Sciences de Toulouse.

1. Je me suis proposé d'étudier comment varie le moment magnétique d'un barreau de nickel qui reçoit, dans des conditions déterminées, des chocs provenant de la chute d'une masse de bronze tombant de hauteurs connues. J'ai résolu précédemment le même problème pour l'acier ([1]).

Le barreau sur lequel j'ai expérimenté est une tige cylindrique de nickel à peu près pur, qui m'a servi déjà ([2]) à étudier l'influence de la température sur le coefficient d'aimantation du nickel. Ce barreau a une longueur de $15^{cm},06$ et un diamètre de $0^{cm},57$ à la température de 15°. Chaque fois qu'il doit subir une aimantation nouvelle, il est ramené préalablement à l'état neutre dans une étuve à paraffine bouillante; j'ai montré en effet qu'à 340°, température inférieure au point d'ébullition de la paraffine sous la pression ordinaire, le nickel cesse d'être magnétique et ne s'aimante pas par le refroidissement quand on le maintient perpendiculaire au champ magnétique terrestre.

L'appareil à chocs est le même qui m'a servi pour l'acier ([3]). Toutefois, dans la crainte de détériorer le barreau de nickel, je ne lui fais pas subir directement les chocs du mouton; ce barreau est introduit dans un trou

([1]) *Annales de Chimie et de Physique*, 6e série, t. XIV, 1888.

([2]) *Annales de Chimie et de Physique*, 6e série, t. VIII, 1886, et *Journal de Physique*, 2e série, t. V, 1886.

([3]) *Annales de Chimie et de Physique*, 6e série, t. XIV, 1888.

cylindrique, de même diamètre que lui, creusé dans une pièce de bois dur : c'est sur cette pièce de bois que vient tomber la masse de bronze de 2400^{gr}.

2. Les moments magnétiques sont mesurés par la méthode de Gauss, le barreau de nickel étant placé dans le méridien magnétique qui passe par le centre de l'aiguille déviée. Les déviations sont lues par le procédé de Poggendorff au moyen d'une bonne lunette dont l'objectif a un diamètre de 4^{cm} et qui permet de lire au $\frac{1}{20}$ les millimètres tracés sur une échelle placée à une distance d'environ 3^m de l'aiguille et fortement éclairée. La mesure d'un moment magnétique résulte de la différence $\alpha - \beta$ des déviations obtenues quand on présente successivement à l'aiguille mobile l'un et l'autre des pôles du barreau de nickel.

La lecture d'une position de l'aiguille se fait toujours par le pointé de trois élongations successives. Toute mesure de déviation se trouve toujours comprise entre deux déterminations du zéro de l'appareil, ce qui permet de tenir compte des variations de la déclinaison pendant la durée d'une série d'expériences. Si l'appareil est bien réglé, le zéro doit correspondre à la déviation $\frac{\alpha + \beta}{2}$.

I. — Chocs sur un barreau aimanté placé dans un champ nul.

3. Le cas le plus simple à étudier est celui où le barreau aimanté est à l'abri de toute action magnétique extérieure; il n'est soumis alors qu'aux actions démagnétisantes, telles que le champ dû à son magnétisme résiduel et les réactions élastiques du milieu, et à la force coercitive.

Le cylindre de nickel ayant été recuit et aimanté préalablement dans la portion uniforme du champ d'une longue bobine, je le place dans la pièce de bois dur dont j'ai parlé plus haut et que je fixe horizontalement entre les deux montants de mon appareil à chocs. Avant l'introduction de l'aimant, j'ai réglé par tâtonnements la position de l'appareil de telle façon que la cavité cylindrique de cette pièce fût à très peu près perpendiculaire au méridien magnétique. L'action du champ terrestre se réduit alors sensiblement à la production d'une légère aimantation transversale qui n'a, comme vient de le montrer M. Paul Janet, qu'un effet très faible sur l'aimantation longitudinale.

4. Dans ce cas, le choc détermine toujours une désaimantation; une succession de chocs égaux produit une diminution graduelle du moment magnétique qui tend vers une certaine limite.

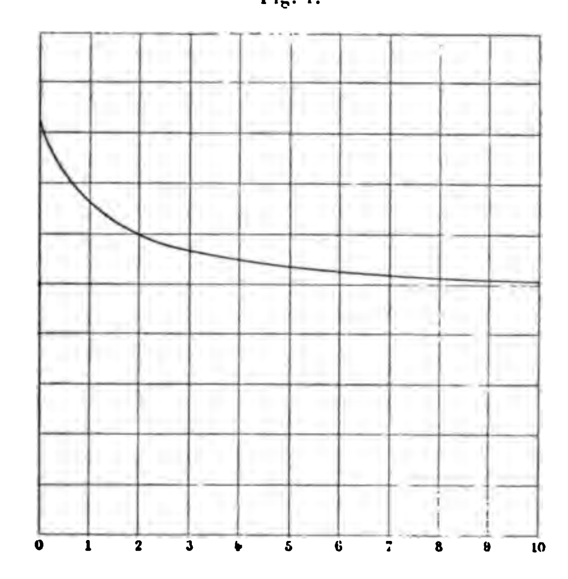
Le Tableau suivant en donne un exemple :

Tableau I.

Nombre de chocs.	Moment magnétique M.	Diminution moyenne de M pour un choc.
0	82,6	
1	65,5	17,1
2	59,55	5,95
3	56,8	2,75
5	53,7	1,55
10	50,3	0,680
20	47,65	0,265
30	46,3	0,135
70	41,55	0,119
100	39,95	0,053
150	38,4	0,031
200	37,85	0,011

On voit que la diminution du moment magnétique, forte pour le premier

Fig. 1.



choc et les quelques suivants, s'atténue rapidement. Si l'on prend pour abscisses les nombres de chocs et pour ordonnées les moments magnétiques

correspondants, la courbe figurative du phénomène ressemble à une branche d'hyperbole équilatère ayant une asymptote parallèle à l'axe des abscisses (*fig.* 1).

5. Les ordonnées de la courbe décroissent d'autant plus rapidement, pour un même moment magnétique initial, que l'intensité du choc, c'est-à-dire la hauteur h de chute du mouton, est plus considérable. Les nombres donnés dans le Tableau suivant sont relatifs à deux séries d'expériences, dans chacune desquelles les valeurs initiales du moment magnétique, très voisines d'ailleurs, ont été réduites à un même nombre, M_0, M_1 et M_5 étant les moments magnétiques après 0, 1, 5 chocs.

Tableau II.

Première série.					Seconde série.		
h.	M_1.	M_5.	$\frac{M_1}{M_0}$.	$\frac{M_5}{M_0}$.	h.	M_1.	$\frac{M_1}{M_0}$.
cm 0	35,0	35,0	1	1	cm 0	91,4	1,000
14	20,0	9,4	0,571	0,269	14	67,85	0,742
19	15,5	7,0	0,443	0,200	34	63,80	0,698
29	8,3	5,2	0,237	0,150	54	61,80	0,676
49	3,8	2,2	0,109	0,063	84	58,10	0,635
84	3,0	1,3	0,086	0,043			

6. Les deux séries de nombres précédents montrent en outre que, pour un même choc, la diminution relative du moment magnétique est d'autant plus marquée que le moment initial est plus petit. Le Tableau suivant mettra mieux le fait en évidence (l'unité de mesure des moments n'y est plus la même que précédemment).

Tableau III.

$h = 84^{cm}$.

M_0	95,30	75,25	51,10	45,85	12,60	8,50	2,0
$\frac{M_1}{M_0}$	0,682	0,674	0,646	0,522	0,412	0,345	0,300
$\frac{M_5}{M_0}$	0,512	0,508	0,476	0,330	0,242	0,164	0,013

En résumé donc, la loi sensiblement hyperbolique de décroissement du moment magnétique sous des chocs égaux dépend à la fois du moment initial et de la hauteur de chute du mouton.

II. — Chocs sur un barreau non aimanté préalablement.

7. Il ne se présente pas ici les mêmes difficultés que j'ai rencontrées pour l'acier. Il suffit, en effet, de porter le nickel dans une étuve à paraffine bouillante et de la laisser se refroidir lentement pour obtenir un barreau à l'état neutre.

Le champ magnétique dans lequel je place le barreau pendant qu'il reçoit des chocs est le champ dû à deux bobines égales, de même axe, parcourues par le même courant dans le même sens. Ces bobines sont enroulées sur la pièce de bois dur qui reçoit les chocs du mouton et qui, à cet effet, a la forme cylindrique, sauf à la partie centrale, non recouverte de fil, où doit s'abattre le mouton. Le barreau, étant disposé dans la pièce de bois constamment à la même place, sera soumis, dans les diverses expériences, à un champ magnétique de forme invariable dont la force en un point varie proportionnellement à l'intensité du courant des bobines.

8. Lorsqu'on fait passer successivement un certain nombre de fois le courant sans imprimer aucun choc, on constate que le métal s'aimante; en général, son moment magnétique, qui a pris une certaine valeur par le premier passage, s'accroît graduellement par les passages suivants et tend rapidement vers une limite. Si, lorsque cette limite est atteinte, on fait passer de nouveau le courant en donnant des chocs, il se produit un accroissement, le plus souvent très notable, du moment magnétique qui atteint finalement une limite nouvelle. Dans une série d'expériences, la première limite M était 6,8, la deuxième M′ a été 22,2; dans une autre série, j'ai obtenu $M = 28,3$ et $M' = 35,7$.

9. Le rapport $\frac{M'}{M}$ est, pour un choc d'intensité donnée, d'autant plus grand que M a une valeur plus faible. Le Tableau suivant est relatif à des chutes du mouton d'une hauteur $h = 84^{cm}$.

Tableau IV.

M.......	28,45	26,50	21,05	9,85	9,425	7,05	4,975	3,60	1,85	1,30
M′.......	35,70	35,0	34,775	27,35	27,95	27,675	23,45	19,975	15,55	16,35
$\frac{M'}{M}$	1,25	1,32	1,65	2,78	2,97	3,92	4,71	5,49	8,40	12,58

On voit que dans les champs faibles le choc décuple, et au delà, le moment magnétique.

10. Lorsque la première limite M a une valeur déterminée, la deuxième limite M′ est d'autant plus élevée que l'intensité du choc est plus grande, comme on en peut juger par le Tableau suivant :

Tableau V.

h.	M.	M′.	$\frac{M'}{M}$.
14	5,9	20,85	3,43
24	5,9	24,40	4,14
14	9,1	25,0	2,75
19	8,75	25,65	2,94
34	9,1	27,7	3,04
19	8,05	23,60	2,93
24	8,05	25,50	3,18
44	8,05	27,65	3,435

11. La deuxième limite est toujours atteinte après un nombre de chocs d'autant plus petit que la hauteur de chute du mouton et l'intensité du champ sont plus grandes. Ainsi, pour $h = 84^{\text{cm}}$ dans un champ intense, la deuxième limite s'obtient par le premier choc, tandis que pour $h = 14^{\text{cm}}$, dans un champ faible, il faut une vingtaine de chocs pour faire prendre au moment magnétique sa valeur maxima M′.

12. Lorsqu'un barreau de nickel, partant d'une aimantation nulle, est placé dans un champ magnétique et y reçoit des chocs, le moment magnétique part de zéro pour atteindre au bout d'un nombre suffisant de chocs une valeur limite, et cette valeur ne diffère pas de la deuxième limite M′ dont je viens de parler plus haut. La loi suivant laquelle s'accroît le moment magnétique peut être représentée géométriquement par une branche d'hyperbole équilatère asymptote à une parallèle à l'axe des chocs, de la forme

$$y = a - \frac{b}{x + c},$$

Tableau VI.

	Nombres de chocs.	y observé.	y calculé.
$a = 16,04$	0	0	0
$b = 9,063$	1	10,25	10,25
$c = 0,565$	2	12,05	12,51
	5	14,10	14,41
	10	15,25	15,18
	20	15,60	15,60
	∞	»	16,04

13. La limite vers laquelle tend le moment magnétique, c'est-à-dire l'ordonnée a de l'asymptote, dépend, comme c'était à prévoir, de l'intensité du choc pour un champ donné; elle varie dans le même sens que cette intensité. Dans le Tableau suivant, le champ magnétique reste constant et les hauteurs de chute du mouton sont successivement de 14^{cm}, 24^{cm} et 84^{cm}.

Tableau VII.

h.	14^{cm}.	24^{cm}.	84^{cm}.
a	14,30	16,04	18,12
b	17,16	9,063	0,272
c	1,20	0,565	0,015

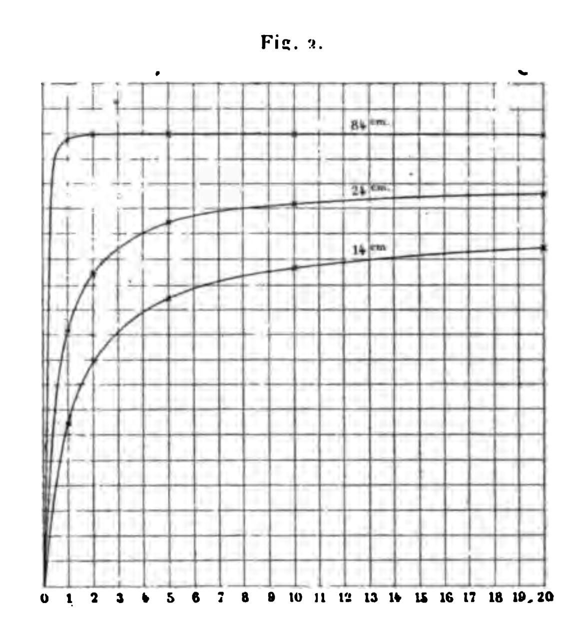
Nombres de chocs.	$h = 14^{cm}$.		$h = 24^{cm}$.		$h = 84^{cm}$.	
	y observé.	y calculé.	y observé.	y calculé.	y observé.	y calculé.
0	0	0	0	0	0	0
1	6,50	6,50	10,25	10,25	17,85	17,85
2	8,85	8,94	12,05	12,51	18,175	17,99
5	10,90	11,53	14,10	14,41	18,10	18,07
10	12,50	12,77	15,25	15,18	18,10	18,10
20	13,50	13,50	15,60	15,60	18,10	18,10

On peut remarquer sur ces nombres que le moment magnétique prend sa valeur maxima d'autant plus vite que h est plus grand. Ainsi, pour $h = 84^{cm}$, la limite est atteinte dès le deuxième choc, tandis qu'on en est encore loin au vingtième choc pour une chute de 14^{cm}. On le voit d'un coup d'œil sur la *fig.* 2.

14. D'autre part, lorsqu'on obtient deux moments magnétiques égaux, l'un sans le secours du choc dans un certain champ, l'autre avec l'intervention

du choc dans un champ beaucoup plus faible, on peut constater que la stabilité de ces aimantations résiduelles est sensiblement la même, c'est-

Fig. 2.



à-dire que leurs lois de décroissement dans les mêmes conditions sont très voisines l'une de l'autre.

III. — Chocs dans un champ quelconque sur un barreau aimanté.

15. J'ai expérimenté finalement sur un barreau de nickel dont l'aimantation résiduelle avait atteint sa valeur limite M par des chocs de hauteur donnée h dans un champ déterminé I; j'ai soumis ce barreau à l'action de chocs nouveaux de hauteur h' dans un champ I', et j'ai mesuré la limite M' du nouveau moment magnétique. Il est clair que ce problème général comprend les problèmes particuliers que j'ai étudiés précédemment.

Nous aurons à considérer tous les cas compris dans le Tableau suivant :

$$\mathrm{I}\times\mathrm{I}'<0,$$

$$\mathrm{I}\times\mathrm{I}'>0\left\{\begin{array}{l}\mathrm{I}'>\mathrm{I}\left\{\begin{array}{l}h'>h,\\h'=h,\\h'<h,\end{array}\right.\\\mathrm{I}'=\mathrm{I}\left\{\begin{array}{l}h'>h,\\h'=h,\\h'<h,\end{array}\right.\\\mathrm{I}'<\mathrm{I}\left\{\begin{array}{l}h'>h,\\h'=h,\\h'<h.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

PREMIER CAS. — I *et* I' *de signes contraires.* — Lorsque la force du deuxième champ est de sens contraire à celle qui a produit l'aimantation du barreau, c'est-à-dire de même sens que la force démagnétisante, il y a toujours diminution progressive du moment magnétique qui tend vers une limite positive ou négative dépendant des valeurs relatives des deux champs et de la grandeur des chocs.

Si le deuxième champ est beaucoup plus intense que le premier et si les chocs nouveaux sont beaucoup plus forts que les autres, le moment magnétique sera renversé. Si au contraire la force du deuxième champ est beaucoup plus faible que celle de l'autre et de même les chocs beaucoup plus petits, le moment magnétique conservera finalement son premier signe. Entre ces deux hypothèses extrêmes, il y a place pour plusieurs hypothèses intermédiaires, la limite du moment magnétique étant fonction des quatre variables indépendantes I, I', h et h'.

SECOND CAS. — I *et* I' *de même signe :*

1° $\mathrm{I}'>\mathrm{I}$. Pour $h'\geqq h$, il y aura toujours accroissement de l'aimantation du barreau qui tendra vers la même limite M' que si le barreau partait d'une aimantation nulle. Ainsi le barreau, qui dans un certain champ I avait pris pour des chocs de 14^{cm} de hauteur un moment $\mathrm{M}=41,9$, a été placé ensuite dans un champ I' à peu près double et a reçu des chocs de 29^{cm} de hauteur; on a obtenu alors $\mathrm{M}'=47,1$, ce qui est sensiblement la valeur du moment quand le barreau non aimanté préalablement est placé dans ce dernier champ I' et y reçoit des chocs de 29^{cm}. Le cas particulier $\mathrm{I}=0$, $h=0$, a été étudié précédemment.

Pour $h' < h$, il peut y avoir accroissement du moment magnétique, surtout si I′ est notablement plus grand que I. Ainsi, pour I produit par le courant de cinq couples Meidinger et $h = 54^{cm}$, on obtient $M = 8,6$; 2 éléments au bichromate de potasse donnant un champ $I' > I$, avec $h = 14^{cm}$, déterminent $M' = 12,75$. Autre exemple : pour I produit par 1 élément au bichromate et $h = 84^{cm}$, on a $M = 7,45$; puis pour I′ dû à quatre couples de même nature et $h' = 14^{cm}$, le moment s'élève à $M' = 22,85$. Mais, généralement, l'accroissement du moment magnétique est insensible ou nul : ainsi, avec 3 Meidinger et $h = 64^{cm}$, on a $M = 8,6$, puis avec 5 Meidinger et $h' = 54^{cm}$, on obtient seulement $M' = 8,7$; de même, avec $h = 34^{cm}$ et le courant de 6 Bunsen, on mesure $M = 46,7$, et M′ prend la même valeur quand on opère ensuite avec 10 Bunsen et une chute $h = 14^{cm}$.

2° $I' = I$. Pour $h' \leqq h$, les chocs nouveaux n'ont aucune influence sur l'aimantation du barreau, c'est-à-dire $M' = M$. Le fait est évident dans le cas de l'égalité des chocs; dans le cas de chocs plus faibles, il résulte de la lecture des nombres suivants :

$$h = 84^{cm}, \qquad h' = 14^{cm},$$
$$M = 17,15, \qquad M' = 17,1.$$

Pour $h' > h$, le moment magnétique s'accroît toujours et prend la même valeur finale que si le barreau partait d'une aimantation nulle : ainsi le barreau de nickel, aimanté par des chocs de 84^{cm} dans un champ donné, prend un moment magnétique égal à 18,1; si, le barreau ayant été ramené à l'état neutre, on fait les deux expériences suivantes, on trouve

$$h = 14^{cm}, \qquad h' = 84^{cm},$$
$$M = 13,50, \qquad M' = 18,10.$$

De même, après avoir reproduit l'état neutre, on trouvera

$$h = 24^{cm}, \qquad h' = 84^{cm},$$
$$M = 15,60, \qquad M' = 18,10.$$

On voit donc que le moment maximum obtenu par des chocs de 84^{cm} est indépendant de l'aimantation initiale produite avec des chocs plus faibles.

3° $I' < I$. Pour $h' \leqq h$, il y aura toujours abaissement du moment magnétique, qui tendra vers la même limite que s'il partait de zéro. Ainsi,

l'on trouve les nombres suivants

$$I, \qquad h = 84^{cm}, \qquad M = 43,6,$$

$$I' = \frac{I}{4} \text{ environ}, \qquad h' = 84^{cm}, \qquad M' = 20,9,$$

et la valeur 20,9 est précisément celle qu'atteint le moment magnétique dans le même champ I' quand il n'y a pas d'aimantation préalable.

Pour $h > h'$, il pourra y avoir augmentation ou diminution du moment magnétique suivant les conditions de l'expérience. Exemple : avec le champ I dû à 1 Bunsen et $h = 14^{cm}$, on trouve $M = 43,55$, et avec le champ I' dû à un couple au bichromate et $h' = 84^{cm}$, on obtient $M' = 21,65$; au contraire, j'ai déterminé les nombres suivants :

$$I\,(4 \text{ Meidinger}), \qquad h = 14^{cm}, \qquad M = 7,25,$$

$$I'\,(3 \text{ Meidinger}), \qquad h' = 64^{cm}, \qquad M' = 8,70.$$

Nous avons traité, au commencement de cette étude, le cas particulier $I' = 0$.

Conclusion. — Ces différents phénomènes sont en général analogues à ceux que présente l'acier et trouvent leur explication dans l'hypothèse d'un métal formé de molécules à forces coercitives diverses, les vibrations produites par des chocs d'intensité donnée ne rendant temporairement libres que les molécules dont la force coercitive est inférieure à une certaine valeur correspondante.

Au point de vue pratique, il résulte de mes recherches sur l'acier et le nickel : 1° qu'avec un champ de faible intensité on peut donner à un barreau une aimantation résiduelle considérable, à la condition de le mettre en vibration pendant qu'il est dans le champ; 2° qu'il y a lieu d'éviter avec le plus grand soin les trépidations dans les machines à aimants permanents, trépidations qui abaissent rapidement la valeur du moment magnétique.

SUR LA

RÉDUCTION EN FRACTION CONTINUE

D'UNE SÉRIE

PROCÉDANT SUIVANT LES PUISSANCES DESCENDANTES D'UNE VARIABLE,

PAR M. T.-J. STIELTJES.

1. Soit

$$S = \frac{a_0}{x} - \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} - \ldots + (-1)^n \frac{a_n}{x^{n+1}} + \ldots \tag{1}$$

une série procédant suivant les puissances descendantes de x. Il est clair qu'on pourra, en général, la transformer en fraction continue de la manière suivante :

$$F = \cfrac{c_0}{x + \cfrac{c_1}{1 + \cfrac{c_2}{x + \cfrac{c_3}{1 + \ldots + \cfrac{c_{2n-1}}{1 + \cfrac{c_{2n}}{x + \ldots}}}}}} \tag{2}$$

En désignant alors par

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{c_0}{x}, \qquad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{c_0}{x + c_1}, \qquad \ldots$$

les réduites de cette fraction continue, le développement de $\frac{P_n}{Q_n}$ suivant les puissances descendantes de x donnera une série dont les n premiers termes coïncident avec ceux de S.

La fraction continue F peut se transformer encore en F'

(3) $$F' = \cfrac{c_0}{x + c_1 - \cfrac{c_1 c_2}{x + c_2 + c_3 - \cfrac{c_3 c_4}{x + c_4 + c_5 - \dots}}},$$

et, en désignant par $\frac{P'_1}{Q'_1} = \frac{c_0}{x + c_1}, \frac{P'_n}{Q'_n}, \dots$ les réduites de cette seconde fraction continue, on a identiquement

$$\frac{P'_n}{Q'_n} = \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}.$$

2. Il est clair que les coefficients $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ sont des fonctions rationnelles de $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$; c_n, du reste, ne dépend que de $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Posons

(4) $$A_0 = 1, \quad A_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{2n-2} \end{vmatrix},$$

(5) $$B_0 = 1, \quad B_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n-1} \end{vmatrix},$$

on aura

(6) $$\begin{cases} c_0 = a_0, \\ c_{2n-1} = \dfrac{A_{n-1} B_n}{A_n B_{n-1}}, \\ c_{2n} = \dfrac{A_{n+1} B_{n-1}}{A_n B_n}. \end{cases}$$

La démonstration de ces formules ne présente aucune difficulté, et nous ne nous y arrêterons pas, renvoyant le lecteur qui désire plus de détails sur ce sujet aux Mémoires suivants :

Frobenius und Stickelberger, *Ueber die Addition und Multiplication der elliptischen Functionen*. (*Journal de Borchardt*, t. 88.)

Frobenius, *Ueber Relationen zwischen den Näherungsbrüchen von Potenzreihen*. (*Journal de Borchardt*, t. 90.)

3. Mais le problème de la transformation de la série en fraction continue est susceptible d'une autre solution que nous allons développer.

Envisageons d'abord le problème inverse, c'est-à-dire cherchons à exprimer réciproquement les a_n au moyen des c_n. Nous proposons, pour ce problème, la solution suivante :

Calculons d'abord une série de quantités $\alpha_{i,k}$, $\beta_{i,k}$ d'après les formules suivantes :

$$(7)\qquad \begin{cases} \alpha_{0,0}=1, \\ \alpha_{i,k}=0 \quad \text{lorsque} \quad i>k, \\ \beta_{i,k}=0 \quad \text{lorsque} \quad i>k; \end{cases}$$

$$(7')\qquad \begin{cases} \beta_{0,k}=\alpha_{0,k}+c_2\alpha_{1,k}, \\ \beta_{1,k}=\alpha_{1,k}+c_4\alpha_{2,k}, \\ \beta_{2,k}=\alpha_{2,k}+c_6\alpha_{3,k}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \beta_{i,k}=\alpha_{i,k}+c_{2i+2}\alpha_{i+1,k}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots; \end{cases}$$

$$(7'')\qquad \begin{cases} \alpha_{0,k+1}=c_1\beta_{0,k}, \\ \alpha_{1,k+1}=c_3\beta_{1,k}+\beta_{0,k}, \\ \alpha_{2,k+1}=c_5\beta_{2,k}+\beta_{1,k}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \alpha_{i,k+1}=c_{2i+1}\beta_{i,k}+\beta_{i-1,k}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Si l'on dispose ces quantités dans le Tableau suivant :

$\alpha_{0,0}$	$\beta_{0,0}$	$\alpha_{0,1}$	$\beta_{0,1}$	$\alpha_{0,2}$	$\beta_{0,2}$	$\alpha_{0,3}$	$\beta_{0,3}$
		$\alpha_{1,1}$	$\beta_{1,1}$	$\alpha_{1,2}$	$\beta_{1,2}$	$\alpha_{1,3}$	$\beta_{1,3}$
				$\alpha_{2,2}$	$\beta_{2,2}$	$\alpha_{2,3}$	$\beta_{2,3}$
						$\alpha_{3,3}$	$\beta_{3,3}$

on voit que chaque colonne verticale se déduit de celle qui la précède, et, en effectuant le calcul, on a

1	1	c_1	c_1+c_2	$c_1^2+c_1c_2$	$c_1^2+c_2^2+2c_1c_2+c_2c_3$	...
		1	1	$c_1+c_2+c_3$	$c_1+c_2+c_3+c_4$	...
				1	1	...
						...

Ceci posé, les quantités a_n, ... s'expriment au moyen des $\alpha_{i,k}$, $\beta_{i,k}$, ainsi qu'il est indiqué par le théorème suivant :

I. *La forme quadratique à une infinité de variables*

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{i+k} X_i X_k$$

est égale à

$$\begin{aligned}
&c_0[\alpha_{0,0}X_0 + \alpha_{0,1}X_1 + \alpha_{0,2}X_2 + \alpha_{0,3}X_3 + \ldots]^2 \\
&\quad + c_0c_1c_2[\alpha_{1,1}X_1 + \alpha_{1,2}X_2 + \alpha_{1,3}X_3 + \ldots]^2 \\
&\quad\quad + c_0c_1c_2c_3c_4[\alpha_{2,2}X_2 + \alpha_{2,3}X_3 + \ldots]^2 \\
&\quad\quad\quad + c_0c_1c_2c_3c_4c_5c_6[\alpha_{3,3}X_3 + \ldots]^2 \\
&\quad\quad\quad\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

de même la forme quadratique

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{i+k+1} X_i X_k$$

est égale à

$$\begin{aligned}
&c_0c_1[\beta_{0,0}X_0 + \beta_{0,1}X_1 + \beta_{0,2}X_2 + \beta_{0,3}X_3 + \ldots]^2 \\
&\quad + c_0c_1c_2c_3[\beta_{1,1}X_1 + \beta_{1,2}X_2 + \beta_{1,3}X_3 + \ldots]^2 \\
&\quad\quad + c_0c_1c_2c_3c_4c_5[\beta_{2,2}X_2 + \beta_{2,3}X_3 + \ldots]^2 \\
&\quad\quad\quad + c_0c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7[\beta_{3,3}X_3 + \ldots]^2 \\
&\quad\quad\quad\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

4. Pour démontrer ce théorème, soient

$$\begin{aligned}
A = {} & c_0[\alpha_{0,0}X_0 + \alpha_{0,1}X_1 + \ldots]^2 \\
& + c_0c_1c_2[\alpha_{1,1}X_1 + \ldots]^2 \\
& \quad + \ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B = {} & c_0c_1[\beta_{0,0}X_0 + \beta_{0,1}X_1 + \ldots]^2 \\
& + c_0c_1c_2c_3[\beta_{1,1}X_1 + \ldots]^2 \\
& \quad + \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ce sont là des formes quadratiques qu'on pourra mettre sous les formes suivantes

$$A = \sum_0^\infty \sum_0^\infty A_{i,k} X_i X_k,$$

$$B = \sum_0^\infty \sum_0^\infty B_{i,k} X_i X_k.$$

Nous remarquons d'abord que

$$A_{i+1,k} = B_{i,k}.$$

En effet, la valeur de $A_{i+1,k}$ est

$$c_0\alpha_{0,i+1}\alpha_{0,k} + c_0c_1c_2\alpha_{1,i+1}\alpha_{1,k} + c_0c_1c_2c_3c_4\alpha_{2,i+1}\alpha_{2,k} + \ldots,$$

c'est-à-dire, d'après les relations ($7''$),

$$(8)\quad c_0\alpha_{0,k}c_1\beta_{0,i} + c_0c_1c_2\alpha_{1,k}[\beta_{0,i} + c_3\beta_{1,i}] + c_0c_1c_2c_3c_4\alpha_{2,k}[\beta_{1,i} + c_5\beta_{2,i}] + \ldots,$$

tandis que la valeur de $B_{i,k}$ est

$$c_0c_1\beta_{0,i}\beta_{0,k} + c_0c_1c_2c_3\beta_{1,i}\beta_{1,k} + c_0c_1c_2c_3c_4c_5\beta_{2,i}\beta_{2,k} + \ldots,$$

c'est-à-dire, d'après les relations ($7'$),

$$(9)\quad c_0c_1\beta_{0,i}[\alpha_{0,k} + c_2\alpha_{1,k}] + c_0c_1c_2c_3\beta_{1,i}[\alpha_{1,k} + c_4\alpha_{2,k}] + c_0c_1c_2c_3c_4c_5\beta_{2,i}[\alpha_{2,k} + c_6\alpha_{3,k}] + \ldots.$$

L'identité des expressions (8) et (9) est évidente.

Il est clair qu'on aura de la même façon

$$A_{i,k+1} = B_{i,k},$$

donc

$$A_{i+1,k} = A_{i,k+1};$$

d'où l'on conclut que généralement

$$A_{i,k} = A_{r,s}$$

sous la condition $i + k = r + s$.

On voit par là qu'il existe une série de quantités

$$a_0,\quad a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \ldots,$$

telles que l'on a identiquement

$$A = \sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{i+k} X_i X_k,$$

$$B = \sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{i+k+1} X_i X_k.$$

De plus, si l'on remarque que, d'après notre algorithme, on a

$$\alpha_{i,i} = \beta_{i,i} = 1,$$

on conclut directement les valeurs des déterminants

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & \dots & \dots & a_{2n-2} \end{vmatrix} = c_0 \times c_0 c_1 c_2 \times c_0 c_1 c_2 c_3 c_4 \times \dots \times c_0 c_1 c_2 \dots c_{2n-2},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n-1} \end{vmatrix} = c_0 c_1 \times c_0 c_1 c_2 c_3 \times \dots \times c_0 c_1 c_2 \dots c_{2n-1},$$

et les formules que nous avons rappelées dans le n° 2 montrent alors que, en réduisant en fraction continue la série

$$\frac{a_0}{x} - \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} + \dots,$$

on obtient la fraction continue

$$\cfrac{c_0}{x + \cfrac{c_1}{1 + \cfrac{c_2}{x + \dots}}}$$

Le théorème énoncé est ainsi démontré.

5. On voit, par ce qui précède, que l'on pourra écrire immédiatement la fraction continue F, dès que l'on aura obtenu les décompositions en carrés des formes quadratiques

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{i+k} X_i X_k, \quad \sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{i+k+1} X_i X_k.$$

Nous ajoutons que, en connaissant seulement la décomposition en carrés de

$$\sum^\infty \sum^\infty a_{i+k} X_i X_k,$$

on pourra écrire immédiatement la fraction continue F′. En effet, dans cette fraction continue figurent seulement les quantités

$$c_0,\quad c_1 c_2,\quad c_3 c_4,\quad c_5 c_6,\quad \ldots$$

et

$$c_1,\quad c_2+c_3,\quad c_4+c_5,\quad \ldots.$$

Les premières sont connues immédiatement. Quant aux autres, il suffit d'observer que

$$\alpha_{n,n+1} = c_1 + c_2 + \ldots + c_{2n+1},$$

pour en conclure

$$c_1 = \alpha_{0,1},\qquad c_2 + c_3 = \alpha_{1,2} - \alpha_{0,1},\qquad c_4 + c_5 = \alpha_{2,3} - \alpha_{1,2},\qquad \ldots.$$

Sous une forme légèrement modifiée, nous pouvons dire :

II. *Si l'on a identiquement*

$$\begin{aligned}\sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{i+k} X_i X_k = \varepsilon_0[X_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots]^2 \\ + \varepsilon_1[X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots]^2 \\ + \varepsilon_2[X_2 + \gamma_3 X_3 + \ldots]^2 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

on a en même temps

$$\frac{a_0}{x} - \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} - \frac{a_3}{x^4} + \ldots = \cfrac{\varepsilon_0}{x + \alpha_1 - \cfrac{\varepsilon_1 : \varepsilon_0}{x + \beta_2 - \alpha_1 - \cfrac{\varepsilon_2 : \varepsilon_1}{x + \gamma_3 - \beta_2 - \ldots}}}$$

6. Nous allons donner maintenant quelques applications de ces théorèmes. Considérons pour cela le développement

$$(\text{séc}\, x)^k = a_0 + \frac{a_1}{1.2} x^2 + \frac{a_2}{1.2.3.4} x^4 + \ldots.$$

On trouve facilement

$$a_0 = 1,\qquad a_1 = k,\qquad a_2 = 2k + 3k^2,\qquad a_3 = 16k + 30k^2 + 15k^3 + \ldots.$$

Généralement a_n est un polynôm [illegible] uis la loi de ces polynômes est très compliquée. [illegible] ction en fraction

sion, nous ferons voir que la fraction continue que nous venons d'obtenir est convergente et représente effectivement l'intégrale si l'on suppose $x > 0$, $k > 0$.

Notons, en passant, le cas particulier $k = -n$, n étant un nombre entier positif. La formule (10) se réduit alors à cette identité algébrique

$$\frac{(n)_0}{x+n} + \frac{(n)_1}{x+n-2} + \frac{(n)_2}{x+n-4} + \ldots + \frac{(n)_n}{x-n} = \cfrac{2^n}{x - \cfrac{1.n}{x - \cfrac{2(n-1)}{x - \ldots - \cfrac{n.1}{x}}}}.$$

7. Nous allons donner maintenant une application du théorème II. Considérons pour cela la fonction

$$f = \operatorname{sin am} x,$$

le module étant k comme d'ordinaire. En calculant les dérivées successives, on voit qu'on a

$$(11)\quad \begin{cases} f = \operatorname{sin am} x[a_0], \\ f'' = \operatorname{sin am} x[a_1 + b_1 z], \\ f^{(4)} = \operatorname{sin am} x[a_2 + b_2 z + c_2 z^2], \\ f^{(6)} = \operatorname{sin am} x[a_3 + b_3 z + c_3 z^2 + d_3 z^3], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

où nous avons posé, pour abréger, $z = k \operatorname{sin am}^2 x$.

Il est clair ensuite que

$$\operatorname{sin am} x = \sum_0^\infty \frac{a_n x^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)},$$

et, d'après la série de Taylor, on a

$$\tfrac{1}{2}[\operatorname{sin am}(x+y) + \operatorname{sin am}(x-y)] = f + f''\frac{y^2}{1.2} + f^{(4)}\frac{y^4}{1.2.3.4} + \ldots,$$

c'est-à-dire, d'après les formules (11),

$$(12)\quad \begin{aligned} &\tfrac{1}{2}[\operatorname{sin am}(x+y) + \operatorname{sin am}(x-y)] \\ &\quad = \operatorname{sin am} x\left[a_0 + a_1\frac{y^2}{1.2} + a_2\frac{y^4}{1.2.3.4} + \ldots\right] \\ &\quad + z \operatorname{sin am} x\left[b_1\frac{y^2}{1.2} + b_2\frac{y^4}{1.2.3.4} + \ldots\right] \\ &\quad + z^2 \operatorname{sin am} x\left[c_2\frac{y^4}{1.2.3.4} + \ldots\right] \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

D'autre part, on a, d'après les formules d'addition,

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}[\sin\operatorname{am}(x+y)+\sin\operatorname{am}(x-y)]\\
&\quad=\frac{\sin\operatorname{am}x\cos\operatorname{am}y\,\Delta\operatorname{am}y}{1-k^2\sin\operatorname{am}^2x\sin\operatorname{am}^2y}\\
&\quad=\sin\operatorname{am}x\cos\operatorname{am}y\,\Delta\operatorname{am}y\left\{1+kz\sin\operatorname{am}^2y+k^2z^2\sin\operatorname{am}^4y+\ldots\right\}.
\end{aligned}$$

La comparaison avec (12) fait voir que

$$\begin{aligned}
\cos\operatorname{am}y\,\Delta\operatorname{am}y &= a_0+a_1\frac{y^2}{1.2}+a_2\frac{y^4}{1.2.3.4}+\ldots,\\
k\sin\operatorname{am}^2y\cos\operatorname{am}y\,\Delta\operatorname{am}y &= \qquad b_1\frac{y^2}{1.2}+b_2\frac{y^4}{1.2.3.4}+\ldots,\\
k^2\sin\operatorname{am}^4y\cos\operatorname{am}y\,\Delta\operatorname{am}y &= \qquad\qquad c_2\frac{y^4}{1.2.3.4}+\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

d'où l'on conclut, par intégration,

$$(13)\quad\left\{\begin{aligned}
\sin\operatorname{am}y &= a_0y+a_1\frac{y^3}{1.2.3}+a_2\frac{y^5}{1.2.3.4.5}+\ldots,\\
\frac{k}{3}\sin\operatorname{am}^3y &= \qquad b_1\frac{y^3}{1.2.3}+b_2\frac{y^5}{1.2.3.4.5}+\ldots,\\
\frac{k^2}{5}\sin\operatorname{am}^5y &= \qquad\qquad c_2\frac{y^5}{1.2.3.4.5}+\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Si l'on se rappelle que $z=k\sin\operatorname{am}^2x$, on voit que le second membre de la formule (12) peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&\left[a_0x+a_1\frac{x^3}{1.2.3}+a_2\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\ldots\right]\times\left[a_0y+a_1\frac{y^3}{1.2.3}+a_2\frac{y^5}{1.2.3.4.5}+\ldots\right]\\
&\quad+3\left[b_1\frac{x^3}{1.2.3}+b_2\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\ldots\right]\times\left[b_1\frac{y^3}{1.2.3}+b_2\frac{y^5}{1.2.3.4.5}+\ldots\right]\\
&\quad\quad+5\left[c_2\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\ldots\right]\times\left[c_2\frac{y^5}{1.2.3.4.5}+\ldots\right]\\
&\quad\quad\quad+\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

tandis que le premier membre est

$$=\frac{1}{2}\sum_0^{\infty}\frac{a_n}{1.2\ldots(2n+1)}\left[(x+y)^{2n+1}+(x-y)^{2n+1}\right].$$

La comparaison de ces deux expressions donne cette relation remarquable

$$a_{i+k} = a_i a_k + 3 b_i b_k + 5 c_i c_k + \dots$$

ou, ce qui revient au même,

$$\begin{aligned}\sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{i+k} X_i X_k = {} & [a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots]^2 \\ & + 3[b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots]^2 \\ & + 5[c_2 X_2 + \dots]^2 \\ & + \dots\dots\dots\end{aligned}$$

Ayant ainsi obtenu la décomposition en carrés de $\sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{i+k} X_i X_k$, on peut écrire immédiatement la réduction en fraction continue de la série $\frac{\alpha_0}{x} + \frac{\alpha_1}{x^2} + \dots$. Il suffit pour cela de calculer $a_0, b_1; b_1, b_2; c_2, c_3, \dots$, ce qui n'a aucune difficulté, à l'aide des formules (13).

En modifiant légèrement le résultat ainsi obtenu, nous trouvons que, si l'on écrit

$$\sin \operatorname{am} x = \alpha_0 x - \alpha_1 \frac{x^3}{1.2.3} + \alpha_2 \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots,$$

la série (divergente)

$$\frac{\alpha_0}{x^2} - \frac{\alpha_1}{x^4} - \frac{\alpha_2}{x^6} - \frac{\alpha_3}{x^8} - \dots,$$

qui provient de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-xz} \sin \operatorname{am} z \, dz,$$

donne la fraction continue convergente

[illegible]

en posant pour abréger [illegible] $= k$.

8. La considération des fractions successives [illegible]

[illegible]

conduit à des résultats analogues, mais qui offrent encore une application du théorème I.

Soit $f(x) = \operatorname{cosam} x$: en introduisant encore la quantité $z = k \operatorname{sinam}^2 x$, les dérivées d'ordre pair se présentent sous la forme suivante

(15)
$$\begin{cases} f = \operatorname{cosam} x[a_0], \\ f'' = \operatorname{cosam} x[a_1 + b_1 z], \\ f^{(4)} = \operatorname{cosam} x[a_2 + b_2 z + c_2 z^2], \\ f^{(6)} = \operatorname{cosam} x[a_3 + b_3 z + c_3 z^2 + d_3 z^3], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

et il est clair que

$$\operatorname{cosam} x = \sum_0^\infty \frac{a_n x^{2n}}{1.2.3\dots(2n)}.$$

Le théorème de Taylor donne ensuite

$$\tfrac{1}{2}[\operatorname{cosam}(x+y) + \operatorname{cosam}(x-y)] = f + f'' \frac{y^2}{1.2} + f^{(4)} \frac{y^4}{1.2.3.4} + \dots,$$

ou bien, en introduisant les valeurs (15),

(16)
$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}[\operatorname{cosam}(x+y) + \operatorname{cosam}(x-y)] \\ &\quad = \operatorname{cosam} x \left[a_0 + a_1 \frac{y^2}{1.2} + a_2 \frac{y^4}{1.2.3.4} + \dots\right] \\ &\quad + z \operatorname{cosam} x \left[b_1 \frac{y^2}{1.2} + b_2 \frac{y^4}{1.2.3.4} + \dots\right] \\ &\quad + z^2 \operatorname{cosam} x \left[c_2 \frac{y^4}{1.2.3.4} + \dots\right] \\ &\quad + \dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

D'autre part, les formules d'addition donnent

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}[\operatorname{cosam}(x+y) + \operatorname{cosam}(x-y)] \\ &\quad = \frac{\operatorname{cosam} x \operatorname{cosam} y}{1 - k^2 \operatorname{sinam}^2 x \operatorname{sinam}^2 y} \\ &\quad = \operatorname{cosam} x \operatorname{cosam} y [1 + kz \operatorname{sinam}^2 y + k^2 z^2 \operatorname{sinam}^4 y + \dots]. \end{aligned}$$

La compar

quable

ou, ce qui re

Ayant

peut écr

$\frac{a_0}{x} - \frac{a_1}{x}$

n'a auc

En r

l'on écr

la séri

qui pr

donne

(14)

en pos

8. I

Il est à remarquer que $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ont ici les mêmes valeurs que dans les formules (15), mais il n'en est pas de même des $b_i, c_i, \ldots$. Cette remarque est à peu près évidente, car si l'on prend encore $a_0 = 1$, on tire des formules (19) le développement

$$\operatorname{cos am} x = \sum_0^\infty \frac{a_n x^{2n}}{1.2\ldots(2n)}.$$

La formule de Taylor donne

$$\tfrac{1}{2}[\operatorname{cos am}(x+y) - \operatorname{cos am}(x-y)] = f'\frac{y}{1} + f'''\frac{y^3}{1.2.3} + f^{(5)}\frac{y^5}{1.2.3.4.5} + \cdots,$$

et, si l'on introduit les valeurs (19),

$$(20)\qquad \begin{aligned} &\tfrac{1}{2}[\operatorname{cos am}(x+y) - \operatorname{cos am}(x-y)] \\ &\quad = \operatorname{sin am} x\, \Delta \operatorname{am} x \left[a_1 \frac{y}{1} + a_2 \frac{y^3}{1.2.3} + a_3 \frac{y^5}{1.2.3.4.5} + \cdots\right] \\ &\quad + z \operatorname{sin am} x\, \Delta \operatorname{am} x \left[b_2 \frac{y^3}{1.2.3} + b_3 \frac{y^5}{1.2.3.4.5} + \cdots\right] \\ &\quad + z^2 \operatorname{sin am} x\, \Delta \operatorname{am} x \left[c_3 \frac{y^5}{1.2.3.4.5} + \cdots\right] \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

or on a

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}[\operatorname{cos am}(x+y) - \operatorname{cos am}(x-y)] \\ &\quad = -\frac{\operatorname{sin am} x\, \Delta \operatorname{am} x \operatorname{sin am} y\, \Delta \operatorname{am} y}{1 - k^2 \operatorname{sin am}^2 x \operatorname{sin am}^2 y} \\ &\quad = -\operatorname{sin am} x\, \Delta \operatorname{am} x \operatorname{sin am} y\, \Delta \operatorname{am} y [1 + kz \operatorname{sin am}^2 y + k^2 z^2 \operatorname{sin am}^4 y + \ldots] \end{aligned}$$

donc, par comparaison avec (20),



$$(21)\qquad \left\{ \begin{aligned} -\ \operatorname{sin am} y\, \Delta \operatorname{am} y &= a_1 \frac{y}{1} + a_2 \frac{y^3}{1.2.3} + a_3 \frac{y^5}{1.2.3.4.5} + \cdots, \\ -k \operatorname{sin am}^3 y\, \Delta \operatorname{am} y &= \qquad b_2 \frac{y^3}{1.2.3} + b_3 \frac{y^5}{1.2.3.4.5} + \cdots, \\ -k^2 \operatorname{sin am}^5 y\, \Delta \operatorname{am} y &= \qquad\qquad c_3 \frac{y^5}{1.2.3.4.5} + \cdots. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Le second membre de la formule (20) s'écrit donc

$$-\left[a_1\frac{x}{1}+a_2\frac{x^3}{1.2.3}+a_3\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\cdots\right]\times\left[a_1\frac{y}{1}+a_2\frac{y^3}{1.2.3}+a_3\frac{y^5}{1.2.3.4.5}+\cdots\right]$$
$$-\left[b_2\frac{x^3}{1.2.3}+b_3\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\cdots\right]\times\left[b_2\frac{y^3}{1.2.3}+b_3\frac{y^5}{1.2.3.4.5}+\cdots\right]$$
$$-\left[c_3\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\cdots\right]\times\left[c_3\frac{y^5}{1.2.3.4.5}+\cdots\right],$$

tandis que le premier membre est

$$\frac{1}{2}\sum_0^\infty\frac{a_n}{1.2\ldots(2n)}[(x+y)^{2n}-(x-y)^{2n}].$$

On en conclut

$$-a_{i+k+1}=a_{i+1}a_{k+1}+b_{i+1}b_{k+1}+c_{i+1}c_{k+1}+\ldots$$

ou encore

$$(22)\qquad -\sum_0^\infty\sum_0^\infty a_{i+k+1}X_iX_k=[a_1X_0+a_2X_1+a_3X_2+\ldots]^2$$
$$+[b_2X_1+b_3X_2+\ldots]^2$$
$$+[c_3X_2+\ldots]^2$$
$$+\ldots\ldots\ldots$$

Les décompositions en carrés données par les formules (18) et (22) permettent maintenant d'écrire immédiatement la fraction continue F, qui résulte de la série

$$\frac{a_0}{x}-\frac{a_1}{x^2}+\frac{a_2}{x^3}-\ldots.$$

En changeant légèrement les notations, nous écrivons le résultat final ainsi : soit

$$\cos\operatorname{am}x=\beta_0-\beta_1\frac{x^2}{1.2}+\beta_2\frac{x^4}{1.2.3.4}-\ldots,$$

alors la série (divergente)

$$\frac{\beta_0}{x}-\frac{\beta_1}{x^2}+\frac{\beta_2}{x^3}-\ldots,$$

qui provient de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-xz}\cos\operatorname{am}z\,dz,$$

es représentent
s différentes que
e.

ÉTUDE

D'UN

COMPLEXE DU SIXIÈME ORDRE,

PAR M. V. ROUQUET,

Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Toulouse.

I. — Propriétés caractéristiques des droites du complexe.

1. Le complexe considéré dans le présent travail est celui que forment les directrices des sections planes d'une quadrique donnée. Pour trouver l'équation de condition à laquelle satisfont les paramètres de toute directrice D, nous ferons usage de la notion du cercle représentatif d'un segment, introduite par Laguerre à l'occasion de son Mémoire sur l'emploi des imaginaires dans la géométrie de l'espace (*Nouvelles Annales de Mathématiques,* 2ᵉ série, tome XI, pages 14 et suivantes).

Laguerre appelle *cercle représentatif* d'un segment réel ou imaginaire aa', le cercle d'intersection autre que le cercle de l'infini (*ombilicale*), des sphères de rayons nuls ayant pour centres les extrémités du segment considéré. Ce cercle a pour centre le milieu du segment aa'; son plan est perpendiculaire à la droite aa', et son rayon est égal au produit $l\sqrt{-1}$, l désignant la demi-longueur du segment. Il résulte de là que ce cercle est réel, seulement dans le cas où les points a et a' sont imaginaires conjugués.

Inversement, le cercle représentatif détermine les extrémités du segment correspondant. Il n'y a d'exception que dans le cas où la droite aa' est isotrope, ce qui a lieu quand son prolongement rencontre l'ombilicale. Alors, quels que soient les points a et a' pris sur cette droite isotrope, le cercle représentatif est cette droite comptée deux fois.

Ceci posé, la proposition fondamentale de cette étude est la suivante :

2. Théorème. — *Pour qu'une droite* D, *située à distance finie, non*

tangente à une quadrique et non isotrope, soit directrice d'une section plane de cette quadrique S, *il faut et il suffit que le cercle représentatif* (A) *du segment* aa' *que la droite* D *intercepte dans la surface rencontre la droite* Δ *polaire conjuguée de* D *par rapport à* S. *Si cette condition est remplie, le point de rencontre* F *de* (A) *avec* Δ *est le foyer correspondant à la directrice* D, *dans la section de la quadrique par le plan* (F, D) *que déterminent le point* F *et la droite* D.

Pour le démontrer, considérons d'abord la section faite dans S par un plan P. Soient F un foyer de la section et D la directrice correspondante. La polaire de F par rapport à la conique de section étant D, le plan polaire de ce point F relativement à S passe par D et, dès lors, F appartient à la polaire conjuguée Δ de D. D'autre part, les tangentes menées de F à la section et dont les points de contact sont situés sur D sont isotropes, ce qui montre que F est à des distances nulles des points a et a' où D rencontre la section, c'est-à-dire la quadrique S. Donc, le point F, déjà situé sur Δ, se trouve encore sur le cercle représentatif (A) du segment aa'.

Réciproquement, soit D une droite située à distance finie, non tangente à S et non isotrope. Supposons que le cercle représentatif (A) du segment aa', intercepté par D dans S, rencontre Δ en un point F. Considérons la section faite dans la quadrique par le plan (F, D). En vertu des restrictions précédentes, les points a et a' sont distincts ainsi que les droites Fa et Fa'; de plus, ces droites sont isotropes puisque les distances Fa et Fa' sont nulles, F étant sur (A) par hypothèse. Enfin ces droites sont tangentes à la section, car F appartient à la polaire conjuguée Δ de D. Il en résulte que D est un foyer de la section et que D est la directrice correspondante. C. Q. F. D.

3. *Remarques.* — I. La démonstration qui précède montre la nécessité des restrictions contenues dans l'énoncé. Nous nous proposons, avant d'aller plus loin, d'examiner successivement les cas qui échappent à la règle générale.

Mais auparavant nous ferons observer qu'une droite réelle D ne peut être directrice d'une section plane dont le plan est réel que si les points a et a' où elle perce la quadrique sont imaginaires. S'il en est ainsi, le point F, supposé unique, est réel ainsi que le plan (F, D) de la section. Toutefois, cela ne suffit pas encore pour la réalité de la section elle-même, car il peut

"t que la conique de section soit

't la regarder comme di-
fini. En effet, les tan-
mêmes situées sur
le et, dès lors,

ite

.t
la
à

itten-

ginaire,
n asym-

à deux axes

on plane de S,
au cône direc-
sommet. Ces di-
points d'intersec-
de l'infini.
passant par l'un des
e est non seulement
tanes de S.
oint ω et en un second
tangente. Concevons le
tré en deux points F et F'
ection de la surface par le
s tangentes en ces points se

coupent au point F, qui est sur Δ. Or ces droites Fa, $F\omega$ sont isotropes, puisque F est un point du cône isotrope de sommet a et que ω appartient à l'ombilicale. Donc, la droite D est la directrice de la section considérée, le foyer correspondant étant le point F. On verrait, de même, que la section de la surface par le plan (F′, D) a D pour directrice et F′ pour foyer correspondant.

La droite considérée D est donc la directrice de deux sections planes. Il n'existe pas d'ailleurs une troisième section dont D soit la directrice, car le foyer correspondant devant appartenir à Δ et au cône isotrope de sommet a ne peut être que l'un des points F ou F′ déjà obtenus.

Il reste à considérer le cas où une droite D est à la fois tangente et isotrope.

Nous allons démontrer que toute droite D satisfaisant aux deux conditions précédentes doit être regardée comme directrice de la section faite dans la quadrique par le plan contenant cette droite et la tangente à l'ombilicale au point α où elle rencontre cette courbe.

Soit, en effet, a le point de contact de D avec S, ce point pouvant être distinct de α ou confondu avec lui. Tout plan passant par D coupe S suivant une conique touchant D en a. La droite D sera directrice de celle de ces sections pour lesquelles les tangentes issues de a, lesquelles se confondent avec D, seront les seules droites isotropes du plan de cette section. Or les plans tangents à l'ombilicale sont les seuls dont les droites isotropes se confondent. La droite D est, par suite, la directrice de la section faite par le plan contenant cette droite et la tangente à l'ombilicale au point α, le foyer correspondant à D étant le point a où elle touche S. De plus, cette section est la seule dont D soit la directrice.

En résumé, pour qu'une droite isotrope soit directrice d'une section plane de S, il faut et il suffit qu'elle soit parallèle à l'une des quatre génératrices communes au cône directeur de la surface et au cône isotrope de même sommet, ou bien qu'elle soit tangente à S. Dans le premier cas, la droite est directrice de deux sections planes dont les plans sont généralement distincts et ne se confondent que lorsque la droite est l'une des asymptotes de la quadrique.

III. On est conduit, d'après ce qui précède, à rechercher s'il n'existe pas, en dehors des directions isotropes asymptotiques, d'autres directrices *singulières ou doubles*, en entendant par là qu'elles sont directrices de deux sections planes.

Pour qu'une droite D non isotrope présente cette particularité, il est nécessaire et suffisant que le cercle représentatif (A) rencontre *en deux points* la droite Δ et, par suite, que cette droite soit contenue dans le plan de (A). Ceci a lieu seulement dans le cas où la droite D est perpendiculaire à l'un des plans principaux de la surface. Si cette condition est remplie, la droite Δ et le centre (A) sont contenus tous les deux dans ce plan principal et ont deux points communs F et F'. La droite D est la directrice des sections faites par les deux plans (F, D), (F', D).

Donc, les seules directrices doubles sont les droites parallèles soit aux directions principales de la surface, soit aux quatre directions isotropes de son cône directeur. Il n'existe pas d'ailleurs de directrice qui puisse convenir à plus de deux sections planes.

IV. On déduit encore de ce qui précède qu'il existe sept points pour lesquels le cône du complexe est indéterminé, ce qui signifie que toute droite passant par l'un d'eux est directrice. Ces sept points, qui sont d'ailleurs les seuls, comme nous le verrons bientôt, possédant la propriété indiquée, sont tous situés à l'infini. Trois d'entre eux sont réels et appartiennent aux directions principales de la quadrique. Les quatre autres sont imaginaires et résultent de l'intersection de l'ombilicale avec la surface. On sait que les trois premiers sont les points d'intersection des couples de côtés opposés du quadrangle ayant les quatre autres points pour sommets. Toute droite passant par l'un de ces sept points, qu'on désigne sous le nom de *principaux ou d'indétermination,* est non seulement directrice, mais directrice *double ou singulière.* On peut remarquer encore que ces sept directions singulières sont celles des droites dont chacune est parallèle à deux plans cycliques de la quadrique proposée.

Il reste à faire voir qu'il n'existe pas d'autres points d'indétermination que les sept points dont on vient de parler.

Si l'on prend d'abord sur l'ombilicale un point α qui n'appartienne pas à la surface, ce point ne saurait être un point d'indétermination, car, en particulier, les droites non tangentes à la surface et passant par ce point ont des directions isotropes, mais non asymptotiques, et ne peuvent, par suite, être des directrices.

Si l'on prend maintenant un point A qui ne soit pas situé sur l'ombilicale et qui ne coïncide pas avec les points où les directions principales de S rencontrent le plan de l'infini, il est évident que les génératrices du cône de

sommet A, circonscrit à S, ne seront pas toutes des bissectrices des angles formés par les droites suivant lesquelles les plans tangents correspondants coupent S. Dès lors ces tangentes, en particulier, ne seront pas des directrices et le point considéré n'est pas un point d'indétermination.

Nous nous proposons maintenant d'appliquer ces considérations générales au cas où la quadrique S possède un centre unique à distance finie.

II. — Cône du complexe.

4. Rapportons la quadrique S à ses plans principaux. Son équation sera

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}-1=0. \tag{1}$$

Il faut trouver la condition pour que la droite D, représentée par les équations

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=\lambda, \tag{2}$$

soit directrice d'une section plane de cette quadrique.

En désignant par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du milieu m du segment aa' que D intercepte dans S, et par λ_1 la valeur commune des rapports (2) relatifs à ce point, on aura d'abord

$$\left\{\begin{aligned} x_1&=x_0+l\lambda_1,\\ y_1&=y_0+m\lambda_1,\\ z_1&=z_0+n\lambda_1,\end{aligned}\right. \tag{3}$$

et, en exprimant ensuite que le point m appartient au plan diamétral conjugué de D, lequel a pour équation

$$\frac{lx}{A}+\frac{my}{B}+\frac{nz}{C}=0,$$

on aura

$$\lambda_1=-\frac{\dfrac{lx_0}{A}+\dfrac{my_0}{B}+\dfrac{nz_0}{C}}{\dfrac{l^2}{A}+\dfrac{m^2}{B}+\dfrac{n^2}{C}}. \tag{4}$$

Si l'on écrit maintenant les équations de D sous la forme

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}=\frac{\rho}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

où ρ désigne la distance du point (x, y, z) de D au point (x_1, y_1, z_1), et si l'on porte les valeurs ci-dessus de x, y, z dans l'équation de la surface, on trouve aisément, pour la demi-longueur du segment aa',

$$(5)\qquad \rho^2=-\frac{S_1(l^2+m^2+n^2)}{\dfrac{l^2}{A}+\dfrac{m^2}{B}+\dfrac{n^2}{C}},$$

après avoir posé

$$(6)\qquad S_1=\frac{x_1^2}{A}+\frac{y_1^2}{B}+\frac{z_1^2}{C}-1.$$

Les équations du cercle représentatif (A) sont donc les suivantes :

$$(A)\quad \begin{cases} (7)\quad l(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=0, \\ (8)\quad (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=-\rho^2=\dfrac{S_1(l^2+m^2+n^2)}{\dfrac{l^2}{A}+\dfrac{m^2}{B}+\dfrac{n^2}{C}}, \end{cases}$$

dont la première représente le plan perpendiculaire au segment aa' en son milieu, et la seconde la sphère ayant le cercle cherché pour grand cercle.

Les équations de la droite Δ, polaire conjuguée de D, savoir

$$\frac{lx}{A}+\frac{my}{B}+\frac{nz}{C}=0,$$

$$\frac{xx_1}{A}+\frac{yy_1}{B}+\frac{zz_1}{C}=1,$$

peuvent s'écrire

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{l(x-x_1)}{A}+\dfrac{m(y-y_1)}{B}+\dfrac{n(z-z_1)}{C}=0, \\ \dfrac{x_1(x-x_1)}{A}+\dfrac{y_1(y-y_1)}{B}+\dfrac{z_1(z-z_1)}{C}=-S_1. \end{cases}$$

Il reste à exprimer que le point de rencontre des plans (7) et (9) appartient à la sphère (8). Si l'on désigne par x', y', z' les coordonnées du point d'intersection de la droite Δ avec le plan perpendiculaire à D en m, on

trouve, par l'application de la règle de Cramer,

$$(10)\quad \begin{cases} x' - x_1 = -\dfrac{AS_1 mn(B-C)}{mnx_1(B-C)+nly_1(C-A)+lmz_1(A-B)}, \\[2ex] y' - y_1 = -\dfrac{BS_1 nl(C-A)}{mnx_1(B-C)+nly_1(C-A)+lmz_1(A-B)}, \\[2ex] z' - z_1 = -\dfrac{CS_1 lm(A-B)}{mnx_1(B-C)+nly_1(C-A)+lmz_1(A-B)}. \end{cases}$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation (8) donnera la condition cherchée.

Remarquons d'abord que la quantité S_1 est en facteur. La suppression de ce facteur est légitime, car la solution $S_1 = 0$ correspond au cas où la droite D est une tangente quelconque et n'est pas, dès lors, directrice. On a donc simplement la condition

$$(11)\quad \begin{aligned} S_1\left(\frac{l^2}{A}+\frac{m^2}{B}+\frac{n^2}{C}\right)&[A^2m^2n^2(B-C)^2+B^2n^2l^2(C-A)^2+C^2l^2m^2(A-B)^2] \\ &= (l^2+m^2+n^2)[mnx_1(B-C)+nly_1(C-A)+lmz_1(A-B)]^2. \end{aligned}$$

Remplaçons maintenant x_1, y_1, z_1 par leurs valeurs (3) et (4) en fonction de x_0, y_0, z_0. Il vient d'abord

$$\begin{aligned} &mnx_1(B-C)+nly_1(C-A)+lmz_1(A-B) \\ &\quad = mnx_0(B-C)+nly_0(C-A)+lmz_0(A-B), \end{aligned}$$

$$S_1 = \frac{S_0\left(\dfrac{l^2}{A}+\dfrac{m^2}{B}+\dfrac{n^2}{C}\right)-\left(\dfrac{lx_0}{A}+\dfrac{my_0}{B}+\dfrac{nz_0}{C}\right)^2}{\dfrac{l^2}{A}+\dfrac{m^2}{B}+\dfrac{n^2}{C}},$$

après avoir posé

$$(12)\quad S_0 = \frac{x_0^2}{A}+\frac{y_0^2}{B}+\frac{z_0^2}{C}-1.$$

La condition pour que la droite D, représentée par les équations (2), soit directrice d'une section plane est donc

$$(13)\quad \begin{aligned} &\left[S_0\left(\frac{l^2}{A}+\frac{m^2}{B}+\frac{n^2}{C}\right)-\left(\frac{lx_0}{A}+\frac{my_0}{B}+\frac{nz_0}{C}\right)^2\right] \\ &\qquad \times[A^2m^2n^2(B-C)^2+B^2n^2l^2(C-A)^2+C^2l^2m^2(A-B)^2] \\ &\qquad = (l^2+m^2+n^2)[mnx_0(B-C)+nly_0(C-A)+lmz_0(A-B)]^2. \end{aligned}$$

La méthode précédente suppose, à la vérité, que la droite D n'est point tangente ou isotrope; mais on peut prévoir que la condition obtenue s'applique encore, par continuité, à ces cas exceptionnels. D'ailleurs nous vérifierons bientôt que la condition (13) est générale.

5. Pour trouver l'équation du cône du complexe ayant pour sommet un point G, *situé à distance finie*, et dont nous désignerons les coordonnées par x_0, y_0, z_0, il suffit de remplacer, dans l'équation (13), l, m, n par les différences $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$.

Afin d'abréger, nous transporterons les axes de coordonnées au sommet G du cône du complexe, et nous désignerons les nouvelles coordonnées par les mêmes lettres x, y, z; nous poserons ensuite

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &S_0\left(\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}\right)-\left(\frac{xx_0}{A}+\frac{yy_0}{B}+\frac{zz_0}{C}\right)^2 = H,\\ &A^2y^2z^2(B-C)^2+B^2z^2x^2(C-A)^2+C^2x^2y^2(A-B)^2 = K,\\ &x^2+y^2+z^2 = I,\\ &x_0(B-C)yz+y_0(C-A)zx+z_0(A-B)xy = L. \end{aligned}\right.$$

L'équation du cône du complexe sera, dans le nouveau système d'axes, parallèle aux axes primitifs

$$(15)\qquad H.K = I.L^2.$$

En ordonnant cette équation, on s'assure aisément qu'il n'existe, à distance finie, aucun point d'indétermination, ce que l'on savait déjà (*Remarque IV* du n° 3).

Donc le cône du complexe est du sixième ordre lorsque son sommet est à distance finie.

6. L'interprétation géométrique des expressions H, I, K, L fera non seulement connaître un certain nombre de droites remarquables situées sur le cône, mais permettra aussi de démontrer la généralité de la condition (13).

1° L'équation $H = 0$ représente le cône circonscrit à la quadrique et ayant pour sommet le point donné G; car cette équation, équivalente à la condition $S_1 = 0$, exprime que le milieu d'une droite D est sur la surface, c'est-à-dire que cette droite est tangente à la quadrique proposée.

2° L'équation $K = o$ représente un cône du quatrième degré. Ce cône admet comme génératrices doubles les parallèles aux axes de la quadrique et n'a pas d'ailleurs d'autres génératrices réelles, ni doubles. Il contient aussi les parallèles menées par son sommet G aux droites isotropes du cône directeur de la quadrique, en sorte que les sept directions singulières du complexe lui appartiennent. De plus, les plans tangents suivant ces droites isotropes sont tangents à l'ombilicale. On vérifie aisément ces résultats au moyen des équations de ces quatre droites, savoir

$$\frac{x^2}{A(B-C)} = \frac{y^2}{B(C-A)} = \frac{z^2}{C(A-B)},$$

et de l'équation du plan tangent au cône (K), laquelle est, en général,

$$\frac{A^2(B-C)^2}{x^3}X + \frac{B^2(C-A)^2}{y^3}Y + \frac{C^2(A-B)^2}{z^3}Z = o,$$

x, y, z désignant les coordonnées du point de contact et X, Y, Z les coordonnées courantes.

Le cône du quatrième degré (K) est complètement déterminé par la condition de contenir les directions singulières du complexe et d'admettre, suivant les directions isotropes, qui sont pour lui des génératrices simples, des plans tangents déterminés; car, les trois premières directions singulières étant des droites doubles du cône (K), le nombre total des conditions est égal à quatorze, nombre requis pour la détermination d'un cône biquadratique dont le sommet est donné. On indiquera plus loin une autre définition géométrique de ce cône.

3° L'équation $I = o$ représente le cône isotrope ayant le point G pour sommet.

4° Enfin l'équation $L = o$ est celle du cône de Chasles relatif au point G, c'est-à-dire du cône du second degré, lieu des normales menées du point G à toutes les quadriques homofocales à la proposée.

Ceci posé, la forme (15) de l'équation du cône du complexe montre que ce cône contient les droites suivantes :

1° *Les droites isotropes du cône circonscrit* (H). On sait, d'après la Remarque II du n° 3, que ces droites sont des directrices exceptionnelles.

2° *Les droites communes aux deux cônes* (H) *et* (L). A cause du facteur L^2, les plans tangents au cône du complexe suivant ces droites sont

·. à (S). Ces droites sont directrices des sections tangents considérés, puisqu'elles sont normales à S passant par leurs points de contact avec S, ·me de Chasles.

·es du cône directeur de S *ayant* G *pour sommet.* ·ectrices doubles dans le sens de la remarque III du ·les *génératrices doubles* du cône du complexe. On calculant les dérivées partielles du premier membre nt que ces dérivées sont annulées par les valeurs, déjà relatives à chacune des droites considérées.

·ntersection des cônes (K) et (L) qui sont : d'abord les de S, droites doubles du cône (K) et aussi du cône du autres droites imaginaires suivant lesquelles ce dernier

·bserver que les directrices exceptionnelles issues de G sont cette énumération, ce qui justifie, ainsi que nous l'avions ·néralité de la condition (13).

nons de constater que les directrices singulières issues du ·ombre de sept, sont des arêtes doubles du cône du complexe. · d'ailleurs, en général, d'autres arêtes doubles en dehors de on vient de parler, puisqu'il n'y a pas d'autres directrices

· ce qui a été dit (*Remarque III* du n° 3) concernant les posi- · directrices singulières, les arêtes doubles du cône du complexe ·ées, trois à trois, sur six plans parallèles aux plans cycliques réels ·inaires de la quadrique.

conséquences ont lieu quelle que soit la position du point G, pourvu e point soit situé à distance finie et que l'une des expressions H, K, ne s'annule pas identiquement pour les coordonnées de ce point. La nière de ces expressions L peut seule présenter cette particularité, ce qui ieu quand le point G est le centre de S. Dans ce cas le cône du complexe ·t formé de l'ensemble des cônes (H) et (K). Cette remarque fournit la se- ·onde définition géométrique que nous avions annoncée pour le cône (K).

Pour toutes les positions à distance finie du point G, autres que le centre de S, le cône du complexe est indécomposable, sans quoi ce cône aurait un nombre d'arêtes doubles supérieur à trois dans un plan, ou bien un nombre

total de ces arêtes supérieur à sept. Il n'existe donc pas, à distance finie, de surface des singularités pour le complexe étudié.

Enfin, d'après le nombre total de ses arêtes doubles, le cône du complexe est de la *seizième classe*.

8. Supposons maintenant que le point G s'éloigne à l'infini dans la direction définie par les équations

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}.$$

L'équation du cylindre auquel, dans ce cas, se réduit le cône du complexe, n'est autre que l'équation de condition (13) où l'on regardera x_0, y_0, z_0 comme des coordonnées courantes, et l, m, n comme des constantes.

Ce cylindre est du second degré, à moins que la direction donnée ne coïncide avec l'une des sept directions singulières, auquel cas l'équation (13) devient une identité, ce qui doit être (*Remarque III* du n° 3).

On a, dès lors, la proposition suivante :

Le lieu des droites parallèles à une direction donnée non singulière qui sont directrices de sections planes de S *est un cylindre du second degré qui touche, suivant deux droites, le cylindre parallèle circonscrit à* S.

Dans le système d'axes adopté, ces droites sont contenues dans le plan représenté par l'équation

$$mnx(B - C) + nly(C - A) + lmz(A - B) = 0.$$

On peut dire également que, lorsque le point G s'éloigne à l'infini, le cône du complexe se décompose en un cylindre du second degré et le plan de l'infini pris quatre fois.

9. Pour toute droite D appartenant au complexe, on sait construire le foyer correspondant F et le plan de la section (n°s 2 et 3). Les équations qui déterminent le foyer sont les équations (10) où x', y', z' désignent les coordonnées de ce foyer et x_1, y_1, z_1 celles du milieu de la corde interceptée par D dans la quadrique. On remplacera x_1, y_1, z_1 par leurs valeurs déduites des formules (3) et (4).

Les équations (10) deviennent illusoires quand le dénominateur s'annule. Mais, dans ce cas, tous les numérateurs doivent être nuls pour que les

équations (7) et (9) du cercle représentatif (A_0) et de la droite Δ soient compatibles. Alors, si S_1 est nul, la directrice D est une tangente à S. Si S_1 est différent de zéro, deux au moins des quantités l, m, n sont nulles et la direction D est parallèle à l'un des axes de S. Dans les deux cas, on sait trouver directement le foyer correspondant à D.

L'équation du plan (F, D) de la section s'obtient aussi sans difficulté. Nous nous bornerons à l'écrire

$$(16)\quad \begin{aligned} &l(x-x_0)[Bn^2(C-A)+Cm^2(B-A)]\\ &+m(y-y_0)[Cl^2(A-B)+An^2(C-B)]\\ &+n(z-z_0)[Am^2(B-C)+Bl^2(A-C)]=0. \end{aligned}$$

Cette équation convient à tous les cas, sauf ceux dans lesquels la droite D est une directrice singulière. On traitera directement ces cas particuliers à l'aide des *Remarques II* et *III* du n° 3.

L'équation (16) montre que les plans des sections admettant pour directrices des droites parallèles sont aussi parallèles entre eux, ce qui pouvait être prévu.

10. Jusqu'à présent nous avons supposé que les axes de la quadrique S sont inégaux, c'est-à-dire qu'elle n'est pas de révolution.

Quand il en est ainsi, deux des quantités A, B, C sont égales. Soit, par exemple, $A = B$, auquel cas la surface est de révolution autour de l'axe des z. L'équation de condition (13) se décompose en deux. D'abord on a la solution $n^2 = 0$, qui donne deux fois toutes les droites perpendiculaires à l'axe de révolution, ce qui ne doit pas étonner, attendu que les directions de ces droites sont des directions principales de la quadrique. On obtient, en second lieu, la condition

$$\begin{aligned} A^2(l^2+m^2)\left[S_0\left(\frac{l^2+m^2}{A}+\frac{n^2}{C}\right)-\left(\frac{lx_0+my_0}{A}+\frac{nz_0}{C}\right)^2\right]&\\ =(l^2+m^2+n^2)(lx_0-my_0)^2,& \end{aligned}$$

qui fournit un cône du quatrième degré pour le cône du complexe.

Les formules et les résultats obtenus peuvent aussi s'appliquer, avec de légères modifications, au cas où la surface est un cône. Dans ce cas, l'équation de S peut s'écrire

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=0.$$

Le seul changement porte sur les valeurs de S_1 et S_0. Pour le cône, on a

$$S_0 = \frac{x_0^2}{A} + \frac{y_0^2}{B} + \frac{z_0^2}{C}.$$

Le cône du complexe est encore du sixième ordre quand S est un cône quelconque, et du quatrième pour le cas où S est un cône de révolution. Lorsque le point G est à l'infini, le cylindre du complexe devient alors l'ensemble de deux plans.

III. — Courbe du complexe.

11. La courbe du complexe relative à un plan P est, comme on sait, l'enveloppe Γ des droites du complexe situées dans le plan P. En général, la classe de cette courbe est égale au degré du cône du complexe.

Il en résulte que, dans le problème actuel, *la courbe* Γ *du complexe est de la sixième classe.*

Pour s'en rendre compte directement, il suffit de remarquer que les tangentes à la courbe Γ menées par un point G du plan P sont les directrices issues de G et contenues dans P. Ces droites sont donc les arêtes de section du plan P et du cône du complexe ayant G pour sommet. Ce cône étant du sixième ordre, les droites cherchées sont au nombre de six, ce qui établit la proposition.

La considération du cas où le cône dégénère en un cylindre montre encore que le nombre des tangentes menées à la courbe Γ, parallèlement à une direction donnée de ce plan, est égal à *deux*. Il faut, en outre, leur adjoindre la droite de l'infini qui est ainsi une tangente quadruple.

L'équation de condition (13) met en évidence une propriété fort remarquable de la courbe Γ. Nous allons effectivement démontrer la proposition suivante :

12. Théorème. — *La courbe* Γ *contenue dans un plan* P *est homofocale à la section de la quadrique proposée par ce plan, pourvu que le plan considéré ne soit parallèle à aucune des directions isotropes du cône directeur de* S.

Supposons donc que le plan P ne soit parallèle à aucune des droites isotropes du cône directeur de S, lesquelles sont situées, comme on sait, sur le cône (K). Cherchons les tangentes isotropes de Γ, c'est-à-dire les tangentes

situées à distance finie, que l'on peut mener à cette courbe par les ombilics (points circulaires) du plan P. Pour ces droites, on a

$$l^2 + m^2 + n^2 = 0;$$

comme l'équation (13) doit être vérifiée, il s'ensuit que l'un des facteurs du premier membre s'annule. Or ce facteur ne peut être le second, puisque, s'il en était ainsi, les directrices isotropes D seraient parallèles à l'une des directions isotropes du cône directeur de S, et il en serait de même du plan qui les contient, ce qui est contraire à l'hypothèse. C'est donc le premier facteur qui s'annule. Il en résulte que les tangentes isotropes à Γ sont aussi tangentes à la surface et, par suite, à la section, qui est, dès lors, homofocale à Γ, comme nous l'avons annoncé.

13. Lorsque le plan P, supposé non cyclique, est parallèle à un seul des axes de la quadrique, il renferme un seul point d'indétermination, savoir le point situé à l'infini sur l'axe considéré. Toute droite passant par ce point étant directrice double, il en résulte que la courbe Γ se décompose en ce point, regardé comme double, et en une courbe de *quatrième classe* homofocale à la conique de section faite dans S par le plan P.

Supposons que le plan P soit parallèle à deux axes de S, ou, ce qui revient au même, à l'un des plans principaux de cette surface. Dans ce cas, le plan P contient deux points d'indétermination pris chacun deux fois et, dès lors, la courbe Γ se décompose en ces deux points et en une courbe de *deuxième classe* homofocale à la conique de section. Donc :

Les directrices des sections planes d'une quadrique qui sont contenues dans un plan parallèle à l'un des plans principaux de cette surface enveloppent une conique homofocale à la conique de section, si l'on excepte celles de ces droites qui sont parallèles aux axes de la section considérée.

La conique qui constitue, à proprement parler, l'enveloppe cherchée est évidemment tangente aux directrices de la section, ce qui achève de la déterminer.

L'équation (16) montre que les droites D situées dans un plan P parallèle à un plan principal de S sont les directrices de sections planes dont les plans sont perpendiculaires à P.

14. Supposons maintenant que le plan P soit parallèle à une seule des droites isotropes du cône directeur de S, auquel cas ce plan est imaginaire. Soit ω le point situé à l'infini dans la direction isotrope considérée. Ce point est, comme on sait, un point d'indétermination. Si l'on considère les six directrices issues d'un point quelconque G de ce plan, deux de ces droites se confondront toujours avec la directrice double Ga. Donc la courbe Γ se décompose en ce point ω pris deux fois, et en une courbe de *quatrième classe*.

Le second point circulaire du plan P est généralement distinct de ω et n'est pas un point d'indétermination. Les tangentes menées de ce point à la partie restante de la courbe Γ sont tangentes à la conique de section par le plan P. On le verrait aisément en répétant le raisonnement du n° 12.

Examinons enfin le cas où le plan P contient deux directions isotropes du cône directeur de S, ce qui revient à dire que ce plan est un des plans cycliques réels ou imaginaires de la surface. Un pareil plan étant aussi parallèle à l'un des axes de S renferme trois points d'indétermination. Par suite, quel que soit le point G pris sur le plan P, les six droites D, contenues dans P et issues de G, sont celles qui joignent ce point G aux points d'indétermination dont on vient de parler, chacune d'elles étant prise deux fois.

Donc, les seules directrices situées dans un plan cyclique de la quadrique proposée sont les directrices singulières qui lui sont parallèles.

15. Il paraît difficile de déduire de la condition (13) les degrés des courbes relatives soit au cas général, soit aux cas particuliers que nous avons examinés. C'est par cette recherche que nous terminerons cette étude et, à cet effet, nous procéderons comme il suit.

Supposons que le plan P soit réel, et prenons ce plan pour plan des xy dans un système d'axes rectangulaires, tels que les axes des x et des y coïncident avec les axes de la section faite dans la quadrique par le plan P. L'équation de cette quadrique S sera

$$Az^2 + 2z(Bx + Cy + D) + \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} - 1 = 0. \tag{17}$$

Nous nous proposons de trouver la condition pour qu'une droite D située dans le plan des xy (P) soit directrice d'une section plane de S.

Les équations de D sont

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 0, \\ ux + vy + w = 0, \end{array} \right. \tag{18}$$

et il s'agit de trouver la relation qui doit exister entre u, v, w pour que cette droite possède la propriété énoncée. Les calculs sont analogues à ceux du n° 4, et nous nous bornerons à écrire les résultats.

Les coordonnées du milieu de la corde interceptée par D étant

$$x_1 = -\frac{\alpha u w}{\alpha u^2 + \beta v^2},$$

$$y_1 = -\frac{\beta v w}{\alpha u^2 + \beta v^2},$$

$$z_1 = 0,$$

le cercle représentatif (A) a pour équations

$$(20)\qquad \begin{cases} \dfrac{x - x_1}{u} = \dfrac{y - y_1}{v}, \\ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2 = \dfrac{\alpha\beta(w^2 - \alpha u^2 - \beta v^2)(u^2 + v^2)}{(\alpha u^2 + \beta v^2)^2}, \end{cases}$$

et les coordonnées x', y', z' du point où le plan perpendiculaire au milieu du segment aa' rencontre la droite Δ, polaire conjuguée de D, sont fournies par les formules

$$(20)\qquad \begin{cases} x' - x_1 = -\dfrac{\alpha\beta u(w^2 - \alpha u^2 - \beta v^2)(Bv - Cu)}{(\alpha u^2 + \beta v^2)[B\alpha v w - C\beta u w - D(\alpha - \beta)uv]}, \\ y' - y_1 = -\dfrac{\alpha\beta v[w^2 - \alpha u^2 - \beta v^2](Bv - Cu)}{(\alpha u^2 + \beta v^2)[B\alpha v w - C\beta u w - D(\alpha - \beta)uv]}, \\ z' = -\dfrac{uv(\alpha - \beta)(w^2 - \alpha u^2 - \beta v^2)}{(\alpha u^2 + \beta v^2)[B\alpha v w - C\beta u w - D(\alpha - \beta)uv]}. \end{cases}$$

En exprimant que ces coordonnées vérifient la seconde des équations (20), on trouve la condition demandée, laquelle, après la suppression du facteur étranger $w^2 - \alpha u^2 - \beta v^2$ et quelques réductions faciles, prend la forme

$$(22)\qquad \begin{aligned} &(w^2 - \alpha u^2 - \beta v^2)[\alpha^2\beta^2(Bv - Cu)^2(u^2 + v^2) + u^2 v^2(\alpha - \beta)^2] \\ &\quad = \alpha\beta(u^2 + v^2)[B\alpha v w - C\beta u w - D(\alpha - \beta)uv]^2. \end{aligned}$$

Si la condition (22) est satisfaite, la droite D est directrice d'une section plane, telle que le foyer correspondant ait pour coordonnées les valeurs de x', y', z', déduites des formules (21), l'équation du plan (F, D) de la

section étant

$$(23)\qquad (\alpha-\beta)uv(ux+vy+w)-\alpha\beta(u^2+v^2)(Bv-Cu)z=0.$$

L'équation (22) est l'équation tangentielle de la courbe Γ contenue dans le plan P. On en déduit immédiatement que la courbe du complexe appartient, dans tous les cas, à la sixième classe.

On voit, de plus, que la droite de l'infini est une tangente quadruple, puisque l'équation (22) est seulement du second degré par rapport à w.

L'équation (22) met en évidence la propriété d'homofocalité constatée au n° 12. Cette même équation fournit aussi, par la comparaison des facteurs des deux membres, un nombre de tangentes plus que suffisant, en tenant compte des directrices de la section elle-même, pour déterminer la courbe du complexe contenue dans le plan donné.

A ces résultats connus, nous ajouterons que l'équation (22) et les formules (21) sont indépendantes du coefficient A de z^2 dans l'équation de S. Donc *les directrices contenues dans le plan* P *et les foyers correspondants sont les mêmes pour toutes les quadriques touchant la proposée suivant la section faite par ce plan.*

17. Nous évaluerons d'abord le degré de la courbe Γ dans le cas général où, les coefficients B et C étant différents de zéro avec $\alpha \gtrless \beta$, le plan P ne contient aucun point d'indétermination. Dans ce cas, la courbe Γ ne donne point lieu à des courbes partielles se réduisant à des points fixes.

Si elle n'admettait pas de tangentes multiples, son degré serait égal au produit $6\times 5=30$. L'existence d'une tangente quadruple, savoir la droite de l'infini, diminue ce dernier nombre de 12 unités. Cherchons les tangentes doubles. L'équation (22), ordonnée par rapport à w, est de la forme

$$(24)\qquad w^2\varphi_4(u,v)+2w\varphi_5(u,v)+\varphi_6(u,v)=0,$$

φ_4, φ_5, φ_6 étant des fonctions homogènes de u et de v, dont les degrés sont égaux aux indices. S'il existe une tangente double à distance finie, elle correspond à une valeur du rapport $\frac{u}{v}$, pour laquelle l'équation précédente acquiert une racine double en w. Cette valeur de $\frac{u}{v}$ sera donc fournie par l'équation du dixième degré

$$(25)\qquad \overline{\varphi_5(u,v)}^2-\varphi_4(u,v)\varphi_6(u,v)=0.$$

RECHERCHES

SUR LA

POLARISATION ROTATOIRE MAGNÉTIQUE

DANS LE SPATH D'ISLANDE;

PAR M. CHAUVIN.

INTRODUCTION.

Lorsque, en 1845, Faraday eut découvert la propriété que possèdent certaines substances, de faire tourner le plan de polarisation de la lumière qui les traverse, sous l'influence d'un champ magnétique, il soumit à l'expérience un très grand nombre de corps. Il en trouva beaucoup d'inactifs : en particulier, tous les gaz et tous les cristaux, sauf quelques espèces cubiques comme le sel gemme, le spath fluor, l'alun.

Depuis ces premières recherches, les physiciens qui ont reproduit le phénomène de Faraday ont considérablement réduit le nombre des substances regardées tout d'abord comme inactives. On peut citer en particulier les travaux de Pouillet, Matthiessen, Bertin, Wertheim, Wiedemann, Ed. Becquerel, Verdet, qui montrèrent que le pouvoir rotatoire magnétique appartient à tous les corps transparents isotropes solides ou liquides. Les recherches de MM. Bichat et H. Becquerel l'ont étendu aux gaz et aux vapeurs.

Les cristaux n'ont point été jusqu'ici l'objet de recherches étendues.

Ed. Becquerel (1) trouva la rotation magnétique dans le quartz. Il annulait la rotation naturelle en superposant deux quartz de même épaisseur et de rotations contraires. Un échantillon jaunâtre de béryl, de 1^{cm} d'épaisseur,

(1) Ed. Becquerel, *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XVII, p. 437.

tives aux tangentes doubles, sont des solutions de l'équation du sixième degré

$$\overline{\varphi_3(u, v)}^2 - \varphi_2(u, v)\varphi_4(u, v) = 0. \tag{28}$$

Le nombre des solutions étrangères est égal au nombre des points distincts où la droite de l'infini rencontre la courbe, savoir $n - 2$. Par suite, le nombre exact des tangentes doubles situées à distance finie est $6 - (n - 2) = 8 - n$, et le nombre total de ces tangentes est $9 - n$. Le degré $4 \times 3 = 12$ de la courbe générale de quatrième classe est donc diminué d'un nombre d'unités égal à $2(9 - n)$, ce qui donne l'équation

$$12 - 2(9 - n) = n;$$

d'où l'on déduit

$$n = 6.$$

Ainsi, dans le cas particulier où le plan P *est perpendiculaire à un plan principal de la quadrique* S, *la partie restante de la courbe* Γ *est du sixième degré et admet trois tangentes doubles, dont deux seulement sont à distance finie.*

19. Lorsque le plan P est parallèle à deux axes de la quadrique, B et C sont nuls. La courbe Γ se décompose en deux points doubles, pris à l'infini sur les axes des x et des y, et une courbe de deuxième classe représentée par l'équation

$$(w^2 - \alpha u^2 - \beta v^2) = \alpha\beta D^2(u^2 + v^2).$$

Dans le cas où le plan P est un plan cyclique, $\alpha = \beta$, et l'on a les solutions

$$u^2v^2 = 0, \qquad (u^2 + v^2)^2 = 0,$$

ce qui donne les résultats obtenus précédemment (n° 14).

En terminant, nous ferons observer que la méthode exposée met en évidence deux autres complexes : l'un, formé des droites Δ polaires conjuguées des directrices D, est le corrélatif du complexe étudié et peut être regardé comme connu dans ses éléments principaux; le second est constitué par les cercles représentatifs des directrices D. Pour le moment, nous nous bornerons à le signaler.

plus simple, il fallait expérimenter sur un cristal biréfringent uniaxe non doué du pouvoir rotatoire naturel.

Malheureusement, les échantillons de cristaux *épais et transparents*, nécessaires pour ces expériences, sont très rares; aussi ai-je cherché à utiliser un beau cristal de spath d'Islande que j'avais à ma disposition. Suivant Wertheim, en raison de sa grande biréfringence, ce cristal ne pouvait être doué du pouvoir rotatoire magnétique. On verra dans la suite de ce travail comment, avec un appareil de mesures suffisamment sensible et des dispositions expérimentales convenables, j'ai pu détruire cette assertion de Wertheim et mettre en évidence les propriétés présentées par le spath d'Islande dans un champ magnétique.

L'étude complète du phénomène doit comprendre non seulement la mesure de la rotation produite par le champ magnétique sur le plan de polarisation des rayons qui traversent le cristal dans différentes directions, mais aussi l'analyse des modifications qu'apporte le champ magnétique sur la nature de la lumière qui se propage dans le cristal.

Ce travail se trouve donc naturellement divisé en deux Parties :

1° Mesure des rotations;

2° Analyse de la lumière.

Nous étudierons successivement ces deux points.

PREMIÈRE PARTIE.

MESURE DES ROTATIONS.

CHAPITRE I.

DISPOSITION DES APPAREILS DE MESURE.

I. — Méthode de mesure des rotations.

Les principales méthodes qui ont été employées pour mesurer la rotation d'un plan de polarisation sont :

1° La méthode de Biot, qui consiste à rétablir l'extinction du champ par une rotation convenable de l'analyseur, si l'on emploie une lumière homogène, ou à chercher la position de l'analyseur qui donne la teinte sensible, si l'on emploie la lumière blanche. C'est la méthode utilisée par Verdet (1) dans une partie de ses recherches sur le pouvoir rotatoire magnétique. Elle exige une source de lumière très intense; Verdet a fait usage de la lumière solaire;

2° La méthode de Pouillet, dans laquelle on rétablit l'égalité de coloration des deux moitiés d'une double lame de quartz. On sait qu'en raison des lois de la dispersion rotatoire cette méthode s'applique exclusivement aux mesures saccharimétriques;

3° La méthode de Broch et Wiedemann, dans laquelle on analyse au spectroscope la lumière qui a traversé le corps à étudier. Si celui-ci acquiert le pouvoir rotatoire, il se produit dans le spectre une bande noire qui en parcourt les différentes régions, lorsqu'on fait tourner l'analyseur. Cette méthode est particulièrement avantageuse dans l'étude de la dispersion rotatoire : elle a été utilisée par M. Joubin dans un travail récent sur ce sujet (2). Elle est susceptible d'une grande précision, mais exige pour cela

---

(1) VERDET, *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XLI, p. 370.

(2) JOUBIN, *Thèse de Doctorat*, 1888.

nploi d'une source de lumière très intense, comme la lumière solaire ou arc électrique puissant;

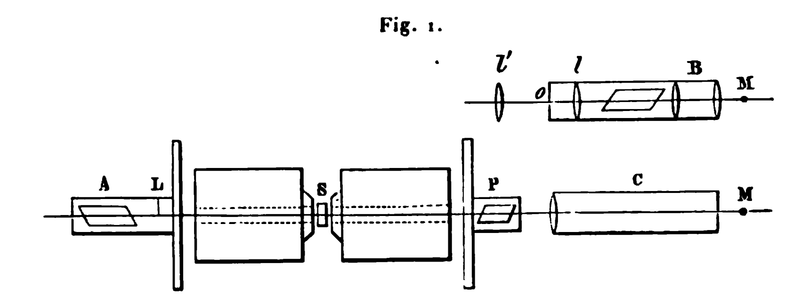
4° La méthode de Lüdtge, qui est, comme nous l'avons vu plus haut, ne modification de la précédente;

5° La méthode du polarimètre à pénombre, méthode très sensible, qui ermet de mesurer les rotations à une ou deux minutes près, sans exiger de ource de lumière aussi intense que les précédentes. C'est cette méthode que j'ai employée dans les expériences actuelles. J'ai pris pour point de départ la disposition du saccharimètre de M. Laurent, que j'ai modifiée successivement, comme on le verra ci-après.

II. — Appareil polarisant.

L'appareil polarisant de M. Laurent se compose d'un système de lentilles B (*fig.* 1) suivi d'un nicol, qui fait converger la lumière sur l'ouver-

Fig. 1.



ture d'un diaphragme dont une moitié est recouverte par une lame demi-onde.

Une modification s'impose de prime abord à cette disposition. Je voulais, comme je l'ai dit, mesurer la rotation électromagnétique non seulement suivant l'axe du cristal, mais aussi suivant les directions inclinées sur cet axe, et de plus faire l'analyse de la lumière modifiée sous l'influence du champ magnétique. En laissant la lame demi-onde en avant du cristal, l'étude du phénomène eût été très complexe. En effet, au delà de cette lame, les deux moitiés du champ sont polarisées dans des plans différents : dans la moitié libre, la lumière est polarisée suivant la section du nicol; dans l'autre elle est polarisée dans un plan symétrique par rapport à l'axe de la lame demi-onde. C'est cet ensemble qui arriverait sur le cristal. Il est clair qu'il est préfé-

rable de ne laisser tomber sur celui-ci qu'un faisceau polarisé dans un plan unique, qui sera pour plus de simplicité une section principale du cristal. C'est ainsi que j'ai été naturellement amené à supprimer la lame demi-onde au polariseur pour la reporter à l'analyseur. J'ai remplacé alors la lame demi-onde par un diaphragme percé d'un trou très petit *o* sur lequel la lumière est exactement concentrée par l'addition d'une lentille convenable *l* au système B, qui n'est pas suffisamment convergent. La lumière, étant alors très convergente, donne des franges et des branches de croix très étroites dans le cristal S vu à travers l'analyseur A. Or, pour analyser la lumière suivant un des bras de la croix, par la méthode du polarimètre à pénombre, il faut l'étaler assez pour que la petite surface vue dans le champ de l'analyseur sous chaque inclinaison du cristal paraisse uniformément éclairée.

Pour étaler ainsi les bras de la croix, il est nécessaire de faire arriver sur le cristal de la lumière suffisamment parallèle, ce que l'on obtient en plaçant en avant du sytème polarisant déjà décrit une lentille convergente *l'* dont l'ouverture *o* du diaphragme occupe le foyer. La lumière est d'autant plus parallèle que cette ouverture est plus petite : on est limité par l'intensité de la lumière.

C'est avec cette disposition que j'ai trouvé les premiers résultats de ce travail. Mais, les recherches ultérieures m'ayant montré la nécessité de pouvoir orienter rigoureusement le polariseur, je fus amené à faire monter un nicol isolé sur un cercle divisé, pour servir de polariseur.

Pour produire plus simplement la lumière parallèle, j'ai employé alors un collimateur.

La partie antérieure au cristal se compose donc définitivement d'un collimateur C suivi d'un nicol P monté sur un cercle divisé. Les deux dispositions successives de l'appareil polarisant sont indiquées l'une au-dessus de l'autre dans la *fig.* 1.

Le collimateur employé est celui d'un spectroscope. Il a environ 32^{cm} de longueur. La fente est remplacée par une petite ouverture circulaire d'environ $\frac{1}{3}$ de millimètre de diamètre ; ce qui, d'après l'expérience, laisse passer assez de lumière, et donne un champ suffisamment uniforme. Les rayons partant du bord extrême de l'ouverture, et allant au centre optique de la lentille collimatrice, font avec l'axe un angle d'environ $\frac{1}{320 \times 6} = \frac{1}{1920}$, c'est-

le nicol et le cercle divisé est ménagée dans
ù peut s'introduire une bague E, maintenue

ig. 2.



on intérieur,
ure, dont une

le-même, de ma-
l. Une petite tige
ns l'anneau-ressort
nents. Un bouton de
système dans la posi-

porte la lame demi-onde
niforme pour chaque incli-
n lumière convergente; mais
autant plus grande que la lu-
pris entre deux conditions con-
, pour rendre la lumière suffisam-
le l'ouverture focale du collimateur,
si grande que possible pour accroître

le degré de parallélisme des rayons lumi-
eur et avec la source de lumière employée,
ons en donnant à l'ouverture du diaphragme

Cette expression croît à mesure que α se rapproche de 90°. Il y a donc intérêt à faire l'angle α, qui règle la sensibilité, aussi voisin que possible de 90°.

Mais l'intensité commune $i = I\cos^2\alpha$ de la lumière reçue lorsque les deux moitiés du champ sont égales dépend de l'intensité I de la source et de α. A mesure que cet angle se rapproche de 90°, i diminue. Au-dessous d'une certaine limite, l'œil n'apprécie plus les différences d'intensité. La grandeur de α, *que l'on fixe expérimentalement*, dépend donc des conditions de sensibilité de l'œil et de la source de lumière employée. D'après ce qui précède, celle-ci devra être la plus intense possible. Nous y reviendrons ultérieurement.

L'emploi de l'analyseur que nous venons de décrire peut être étendu à la lumière elliptique dans certaines limites. En effet, lorsque l'axe de la lame demi-onde coïncide avec l'un des axes d'une vibration elliptique, l'ellipse sortante est, au signe près, identique à l'ellipse incidente. Si a et b sont les axes de cette ellipse, les deux moitiés du champ ont une même intensité égale à

$$i = b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha.$$

Cette condition détermine donc les axes de la vibration elliptique. La sensibilité est donnée par l'expression

$$\frac{di}{i} = \frac{[b^2\cos^2(\alpha-\beta)+a^2\sin^2(\alpha-\beta)]-[b^2\cos^2(\alpha+\beta)+a^2\sin^2(\alpha+\beta)]}{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha},$$

$$\frac{di}{i} = \frac{(b^2-a^2)\sin 2\alpha\sin 2\beta}{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha},$$

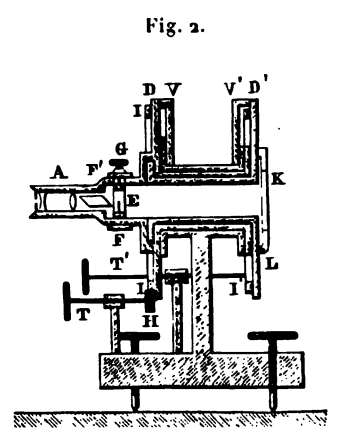
ce qui montre qu'à mesure que a augmente, c'est-à-dire à mesure que l'ellipse grandit, la sensibilité diminue, fait évident *a priori*. L'expérience m'a montré que la méthode pouvait s'appliquer jusqu'à un rapport d'axes égal à $\frac{1}{10}$ environ. Elle convient en particulier à toutes les ellipses que nous aurons à déterminer dans ce travail.

La partie de l'appareil analyseur destinée à la mesure des rotations a une disposition semblable à l'analyseur du saccharimètre de M. Laurent.

Le nicol (*fig.* 2), suivi d'une petite lunette de Galilée, est monté dans un tube A fixé au centre d'un cercle divisé D qui se meut devant un vernier V. La graduation est faite sur tranche. Le cercle D est mis en mouvement à l'aide d'un pignon denté H qui engrène avec une roue dentée II fixée sur une

des faces de ce cercle. Entre le nicol et le cercle divisé est ménagée dans le tube une partie libre évidée, où peut s'introduire une bague E, maintenue

Fig. 2.



à l'aide d'un anneau FF' faisant ressort. Cette bague porte à son intérieur, monté entre deux verres, un petit écran percé d'une ouverture, dont une moitié est recouverte par la lame demi-onde.

On règle la sensibilité en faisant tourner la bague sur elle-même, de manière à modifier l'angle de la lame demi-onde et du nicol. Une petite tige fixée à la bague, et traversant une encoche pratiquée dans l'anneau-ressort qui l'entoure, permet d'opérer facilement ces mouvements. Un bouton de serrage G se vissant sur la tige sert à immobiliser le système dans la position convenable.

La grandeur de l'ouverture du diaphragme qui porte la lame demi-onde a une grande importance. Le champ doit être uniforme pour chaque inclinaison du cristal. Or on observe en réalité en lumière convergente; mais le champ paraît uniforme sur une étendue d'autant plus grande que la lumière est plus parallèle. On se trouve donc pris entre deux conditions contradictoires : d'une part, on est conduit, pour rendre la lumière suffisamment parallèle, à réduire le diamètre de l'ouverture focale du collimateur, que, d'autre part, on doit laisser aussi grande que possible pour accroître l'intensité de la lumière.

L'expérience montre que, avec le degré de parallélisme des rayons lumineux indiqué au sujet du polariseur et avec la source de lumière employée, on est dans de bonnes conditions en donnant à l'ouverture du diaphragme un diamètre de 3^{mm}.

L'analyseur que nous venons de décrire est complété par un dispositif permettant de mesurer le rapport des axes d'une vibration elliptique : nous y reviendrons dans la suite.

Ajoutons seulement que l'appareil est posé sur une planchette pouvant se déplacer parallèlement à elle-même à l'aide d'une vis, ce qui permet d'amener facilement son axe au centre du faisceau lumineux.

IV. — Support du cristal. Électro-aimant.

Entre le polariseur et l'analyseur est placé l'électro-aimant. J'ai utilisé celui de Ruhmkorff muni de ses petites pièces polaires coniques. Pour laisser libre l'espace compris au-dessous des bobines, je l'ai placé sur un fort support en bois, permettant de rejeter les masses de fer sur le côté.

Dans toutes les premières recherches, l'électro-aimant fut actionné par des piles; mais, plus tard, il fut actionné par une machine Edison de 50 lampes, mise en mouvement par un moteur Otto de 8 chevaux. On peut ainsi utiliser des courants allant jusqu'à 40 ampères.

Dès qu'on fait passer pendant un certain temps des courants un peu intenses dans le fil de l'électro-aimant, il s'échauffe et échauffe par suite les pièces polaires entre lesquelles se trouve le cristal. Celui-ci serait donc soumis pendant les mesures à des variations importantes de température. Pour remédier à cet inconvénient, j'ai emboîté les deux pièces coniques dans de petites caisses plates en zinc, ayant le diamètre extérieur des bobines de l'électro-aimant. Deux tubulures diamétralement opposées permettent d'établir dans ces caisses un courant d'eau continu. Ce courant est obtenu en faisant passer l'eau d'un premier flacon dans un second placé à un niveau inférieur. En réglant convenablement la vitesse du courant d'eau, son échauffement est négligeable. Lorsque l'écoulement est terminé dans un sens, on change la position respective des flacons : l'écoulement se fait en sens inverse, et ainsi de suite.

Le cristal, disposé sur un théodolite Secrétan dont on a enlevé les lunettes, est placé en S (*fig.* 1) entre les pôles de l'électro-aimant distants de 5^{cm}. Il peut recevoir des mouvements de rotation autour d'un axe horizontal et autour d'un axe vertical. Ces mouvements sont mesurés sur les deux cercles divisés du théodolite.

V. — Lumière.

Dans ces mesures photométriques, le choix de la source lumineuse a une grande importance. La méthode de mesures par la lame demi-onde exige l'emploi d'une source de lumière jaune homogène et intense. Cette double condition est difficile à réaliser. Le brûleur de M. Laurent, très avantageux dans certains cas, exige une pression de gaz assez forte que je n'avais pas, au moins dans la journée, à ma disposition. De plus, le réglage de la flamme est délicat, et celle-ci ne se maintient pas fixe pendant bien longtemps, en raison de la dépense constante de sel, même dans l'intervalle des mesures.

J'ai essayé d'utiliser un procédé que Bertin avait imaginé pour projeter les franges des cristaux. Ce procédé consiste à diriger le dard du chalumeau à la surface d'un creuset de charbon de cornue, percé suivant son axe d'un trou dans lequel on a coulé du sel fondu. Ce sel chauffé vient se volatiliser peu à peu dans la flamme à travers les pores du charbon et donne du jaune. Mais cette lumière contient encore beaucoup de blanc; de plus, le charbon se creuse rapidement, ce qui déplace le point lumineux et rend la lumière très variable.

On pouvait aussi songer à utiliser la lumière blanche rendue homogène par des dissolvants appropriés. J'ai même essayé à cet effet l'emploi simultané de dissolutions de bichromate de potasse et de sulfate de nickel, qui arrêtent respectivement: la première, le violet, le bleu et jusqu'au vert, suivant le degré de concentration; la seconde, le rouge. Mais ces substances réduisent en même temps beaucoup l'intensité du jaune et ne donnent d'ailleurs jamais une lumière suffisamment homogène. Après bien des tâtonnements, voici le procédé que j'ai employé.

Dans un petit creuset de grès fendu latéralement sur une largeur de 1^{cm} à 2^{cm}, on coule du sel fondu. Puis on fait arriver, suivant la partie de la surface latérale libre du petit bloc de sel ainsi obtenu et tangentiellement à son arête supérieure, le dard du chalumeau à gaz oxhydrique. On obtient ainsi une belle lumière très intense et très fixe. L'observateur commande l'arrivée de l'oxygène par un robinet placé sous sa main. La lumière n'est ainsi donnée que pendant les mesures, ce qui rend la dépense du sel très lente. On remonte de temps en temps le creuset à mesure que le sel fond.

Il importe de bien placer la lumière par rapport à l'ouverture focale du collimateur. A cet effet, la lampe est fixée sur une planchette mobile dans

[illegible] rainure. Cette planchette peut se manœuvrer de loin à l'aide de deux [illegible] passant sur de petites poulies placées à droite et à gauche de l'appa- [illegible].

Sous sa forme définitive, l'appareil se compose donc des parties succes- [illegible] suivantes :

1° La source lumineuse ;
2° Le collimateur ;
3° Le polariseur ;
4° L'électro-aimant entre les pôles duquel est placé le cristal ;
5° L'analyseur.

La *fig.* 1 représente ces différents appareils disposés à la suite l'un de [illegible].

Les axes de ces différentes parties doivent être placés rigoureusement en [illegible] droite.

CHAPITRE II.

RÉGLAGE DE L'APPAREIL.

Avant d'établir le cristal sur son support, il faut régler toutes les autres parties de l'appareil. Ce réglage consiste à les fixer les unes à la suite des autres dans une orientation convenable et à déterminer certaines constantes nécessaires aux mesures ultérieures.

I. — Mise en place des appareils.

[illegible]-aimant ne pouvant être déplacé facilement en raison de sa masse, [illegible] sert de repère.

[illegible] d'abord méthodiquement sur le collimateur jusqu'à ce que le [illegible] traverse l'électro-aimant suivant son axe. Puis on inter- [illegible]. Afin de n'utiliser que le centre du nicol, celui-ci porte en [illegible] deux diaphragmes percés de petites ouvertures de 6^{mm} [illegible]

[illegible] de régler le tirage du collimateur. Si les faces du nicol [illegible] planes et parallèles, de telle sorte qu'en les traver-

sant les rayons ne subissent pas de déviation, il suffirait de régler isolément le collimateur sur l'infini. Mais cette condition n'est pas toujours réalisée, et les faces sont généralement un peu convexes en raison de leur faible étendue et de la difficulté du travail du spath. Il est préférable de faire le réglage après l'interposition du polariseur muni de ses diaphragmes. Pour l'effectuer, on se fonde sur la remarque suivante :

Deux lunettes à réticules A et B, pointées séparément sur une troisième C, ne sont au point l'une sur l'autre que lorsque A, B, C sont réglées toutes trois à l'infini.

On prend donc deux lunettes que l'on pointe séparément sur l'ouverture du diaphragme du collimateur. On regarde si les deux lunettes sont alors au point l'une sur l'autre. S'il en est ainsi, le réglage est terminé; sinon, on modifie méthodiquement le tirage du collimateur jusqu'à ce que cette condition soit réalisée.

Reste à régler l'analyseur, c'est-à-dire à faire coïncider son axe géométrique avec l'axe du faisceau lumineux incident. L'analyseur porte, comme on sait, une lunette de Galilée permettant de viser la lame demi-onde. Cette lunette peut être transformée facilement en lunette astronomique : il suffit de remplacer la lentille divergente par une lentille convergente de longueur focale convenable. Pour les pointés, cette lentille est de plus munie d'un réticule. A l'aide de cette lunette on vise l'ouverture du diaphragme du collimateur, qui apparaît dans le champ comme un petit point lumineux. Si toutes les pièces de l'analyseur étaient géométriquement centrées par construction, il suffirait de faire coïncider ce point lumineux avec le point de croisement des fils du réticule. Mais le centrage du réticule, des lentilles, etc., n'est jamais parfait. Pour effectuer ce réglage, on modifie la distance du point lumineux au point de croisement des fils du réticule, par des déplacements convenables de l'appareil, jusqu'à ce que cette distance demeure constante pour une rotation complète du cercle de l'analyseur.

Cette condition réalisée, on reconstitue la lunette de Galilée que l'on met au point sur la lame demi-onde. Lorsque l'analyseur est ainsi réglé, on fixe avec de l'arcanson les crapaudines qui le supportent. Il ne peut plus alors recevoir, comme nous l'avons dit, que des mouvements de translation permettant d'amener son axe au centre du faisceau lumineux.

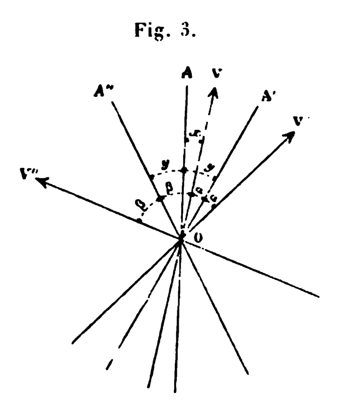
II. — Établissement des constantes.

Il faut encore, avant toute mesure, fixer l'orientation du polariseur. Celle-ci doit être telle que le plan de polarisation du rayon qui en sort coïncide sous toutes les incidences avec l'une des sections principales du cristal à étudier. Or, lorsque ce dernier est convenablement réglé sur son support, et nous verrons ultérieurement comment s'effectue ce réglage, l'une de ses sections principales passe par l'axe vertical du théodolite, et l'autre lui est perpendiculaire. Il faut donc orienter le polariseur de manière que l'une de ses sections principales contienne l'axe vertical du théodolite. Voici la méthode employée pour réaliser cette condition.

Le polariseur occupant d'abord une position quelconque, fixée par la lecture du cercle divisé auquel il est lié, on détermine dans l'analyseur la direction de la vibration incidente; puis on place sur le théodolite une lame demi-onde traversée par le faisceau lumineux.

Soient A l'axe du théodolite; V la vibration incidente; A′ l'axe de la lame

Fig. 3.



demi-onde. L'interposition de celle-ci amène V dans une position symétrique V′. On détermine dans l'analyseur la direction V′. La différence des lectures donne l'angle $VOV' = 2\alpha$. Si x et y désignent les angles de OV et OA′ avec OA.

$$y - x = \alpha, \qquad (1)$$

on fait alors tourner l'équipage mobile du théodolite de 180° autour de l'axe vertical OA. L'axe de la lame demi-onde OA′ prend la direction OA″ symétrique par rapport à OA. La vibration OV devient OV″. On cherche

:tion OV″; d'où l'angle VOV″ $= 2\beta$,

sa section prin-

.périmental, il est
β pour différentes
.x courbes ayant pour
.our ordonnées les va-
n des deux courbes dé-

.seur pendant toute la série
ition de l'analyseur fixant la
ie nous appellerons le zéro de

u **cristal.**

nt le cristal sur son support. C'est
lifficultés de ce travail. Il importe de
.n, car la rotation magnétique décroît
.ar l'axe optique du cristal avec le rayon
i'ils n'avaient pris aucune précaution de
tateurs qui ont étudié le pouvoir rotatoire
bre de corps ne l'ont observé que sur un très
le cristaux.
.it est polarisé dans une section principale du
il sans altération. C'est ce qui a lieu ici en parti-
polarisation initial, lorsqu'on amène l'axe du cristal

.u zéro, c'est-à-dire dans la position où les deux moi-
ne intensité égale sans le cristal, en faisant tourner ce
.xe *horizontal* du théodolite, il arrive un moment où le

champ redevient uniforme : c'est précisément lorsque la section principale, déterminée par l'axe du cristal et le rayon incident, vient coïncider avec le plan de polarisation initial.

L'uniformité du champ étant ainsi obtenue en un point, elle doit théoriquement se maintenir, si l'on fait tourner le cristal autour de l'axe *vertical* du théodolite. Le plan de polarisation initial est en effet perpendiculaire à cet axe d'après un réglage antérieur; et, en faisant tourner ainsi le cristal, la section principale reste constamment en coïncidence avec le plan de polarisation. Or l'expérience ne vérifie jamais complètement ce résultat.

Lorsqu'on fait tourner le cristal autour de l'axe vertical du théodolite, les deux moitiés du champ ne restent pas constamment d'égale intensité, c'est-à-dire que la vibration incidente ne se transmet pas sans altération. Au début de ces recherches, avant d'être en possession de méthodes rigoureuses de réglage, je trouvais aussi des variations considérables dans les intensités des deux moitiés du champ. Ces variations tenaient à la fois au réglage défectueux des appareils et aux imperfections de la taille du cristal : convexité et absence de parallélisme des faces. Je fus ainsi conduit à établir un réglage très minutieux des différentes parties de l'appareil, tel que je l'ai décrit ci-dessus. En outre, il fallait un cristal de spath dont les faces fussent bien perpendiculaires à l'axe et bien parallèles entre elles. On connaît l'habileté particulière de M. Laurent dans ce genre de travail, et les méthodes délicates de contrôle imaginées par lui. Il a bien voulu me tailler les cristaux dont j'avais besoin pour ces recherches. Je tiens à le remercier ici bien vivement de son extrême obligeance. Grâce à lui, j'ai pu expérimenter sur deux beaux échantillons de spath de 26^{mm} et 33^{mm} d'épaisseur. D'après M. Laurent, le parallélisme des faces est obtenu à une vingtaine de secondes près; leur perpendicularité, par rapport à l'axe, à moins d'une minute.

En opérant avec de pareils spaths, le réglage peut être obtenu d'une manière assez approchée, sans être encore absolu. Mais, en passant d'une incidence quelconque à une autre, il suffit d'une rotation de *quelques secondes* autour de l'axe *horizontal* du théodolite pour rétablir l'égalité des deux moitiés du champ. La valeur de cette rotation est donc de l'ordre du degré de perfection de la taille. D'ailleurs, une différence de quelques secondes dans la position du cristal n'entraîne, dans la mesure des rotations, que des erreurs de l'ordre même des erreurs d'expérience. On peut donc, pour chaque incidence, ou bien partir de zéros légèrement différents, ou bien partir toujours du même zéro en faisant chaque fois tourner le cristal d'un

angle convenable autour de l'axe horizontal : on a pratiquement le même résultat.

Pour effectuer ces rotations, toujours très petites, comme je l'ai dit, j'ai fixé sur la tête de la vis qui commande la rotation autour de l'axe horizontal un petit cercle divisé en 200 parties, et qui tourne devant un index fixe. D'après les dimensions de l'appareil, une division correspond à 1″ environ. On peut alors, pour chaque incidence, rétablir méthodiquement le zéro.

CHAPITRE III.

RÉSULTATS DES MESURES DE ROTATIONS.

I. — Valeur des constantes.

La première détermination à faire est celle de zéro du polariseur et de l'analyseur par la méthode décrite précédemment.

Voici les résultats de trois séries de mesures faites en donnant à la lame demi-onde des positions différentes.

Chaque nombre inscrit dans la première colonne du Tableau ci-dessous est la moyenne de 4 ou 5 lectures.

Polariseur, o.

Analyseur, $n = 1^\circ 6'$.

Analyseur.		Différences à $n = 1°,6$.		Différ. $\frac{2\beta - 2\alpha}{4}$.
Après interposition de la lame demi-onde.	Après rotation de 180° autour de l'axe vertical du théodolite.	$n' - n = 2\beta$.	$n - n'' = 2\alpha$.	$x = \frac{2\beta - 2\alpha}{4}$.
$n' = 8°.4'$	$n'' = -0°.10'$	6°.58′	1°.16′	1°.26′
8.14	— 0.18	7.8	1.24	1.26
12.20	— 4.30	11.14	5.36	1.24
		Moyenne à 2′ près.......		1.26

La section principale du polariseur fait donc un angle de 1°26′ avec l'axe du théodolite. La position pour laquelle cette section contient l'axe est par conséquent à la division 1°26′ du cercle divisé auquel est lié le polariseur. La

position correspondante de l'analyseur est à la division 1°26′ + 1°6′ = 2°32′. C'est le zéro de l'analyseur.

II. — Marche d'une expérience.

Après avoir déterminé les constantes, on interpose le cristal. Voici la marche d'une expérience :

Le cristal étant placé dans une position à étudier, on fait la lecture du cercle horizontal du théodolite. Cette lecture sert ultérieurement à fixer l'inclinaison de l'axe optique sur les rayons incidents. Puis, à l'aide de l'analyseur, on détermine, pour une série d'inclinaisons autour de l'axe horizontal, la direction de la vibration qui a traversé le cristal, jusqu'à ce qu'on passe par la division 2°32′, qui correspond au zéro direct sans le cristal.

Si l'on voulait avoir aussi exactement que possible la position correspondant à ce zéro, il faudrait tracer une courbe ayant pour abscisses les positions successives du cercle vertical, et pour ordonnées les zéros mesurés. L'abscisse correspondant à l'ordonnée 2°32′ donnerait la position cherchée. Mais, ainsi que nous l'avons déjà dit, une rotation de 1″ autour de l'axe horizontal déplace souvent le zéro de plusieurs minutes. Or une erreur de quelques secondes dans l'orientation du cristal n'a pas d'influence sur la valeur de la rotation magnétique. On peut donc partir de zéros un peu différents de 2°32′, ce qui simplifie le réglage.

On fait alors passer le courant successivement dans les deux sens, et l'on cherche les nouvelles positions de la vibration qui sort du cristal. Chaque mesure est, bien entendu, la moyenne d'un certain nombre d'expériences. En général, on fait trois ou quatre lectures, ne différant pas de plus de 4′ ou 6′. La moyenne est estimée exacte à 2′ près environ. Il faut remarquer qu'on se trouve dans des conditions plus défavorables que dans les mesures saccharimétriques : d'abord parce que le champ n'est pas toujours absolument uniforme, ensuite parce que la lumière n'arrive que par la très petite ouverture focale du collimateur.

III. — Première série de mesures relatives à une valeur fixe du courant

Voici une première série complète de mesures faites avec une intensité de courant égale à 20 ampères :

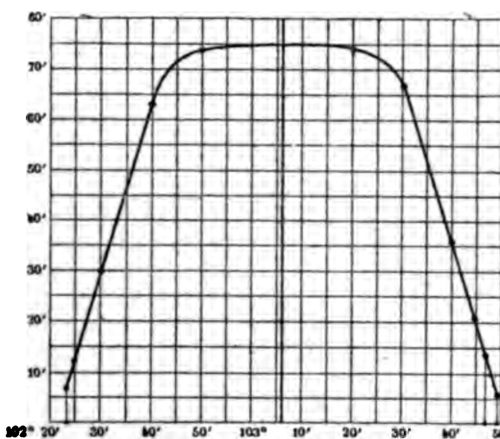
	Zéro.		1er sens du courant.		2e sens du courant.		Rotations.		
Théodolite.	Lectures.	Moy.	Lectures.	Moy.	Lectures.	Moy.	1er sens.	2e sens.	Moy.
102°.23'	2°.28'	2°.28'	2°.36'	2°.34'	2°.22'	2°.20'	0°. 6'	0°. 8'	0°. 7'
	2.28		2.34		2.16				
	2.30		2.34		2.22				
			2.32						
			2.36						
102.25	2.34	2.32	2.44	2.44	2.20	2.20	0.12	0.12	0.12
	2.34		2.44		2.20				
	2.30				2.20				
	2.32								
102.30	2.28	2.32	3. 6	3. 2	2.	2. 2	0.30	0.30	0.30
	2.30		3. 2		2. 4				
	2.34		3. 2						
	2.34								
102.40	2.28	2.28	3.32	3.32	1.24	1.26	1. 4	1. 2	1. 3
	2.28		3.34		1.26				
			3.32		1.28				
102.50	2.26	2.26	3.36	3.40	1.16	1.12	1.14	1.14	1.14
	2.26		3.38		1.12				
			3.44		1.12				
			3.40						
103. 5	2.26	2.30	3.46	3.44	1.20	1.16	1.14	1.14	1.14
	2.34		3.42		1.14				
	2.30		3.42		1.14				
	2.30		3.42		1.14				
103.20	2.28	2.28	3.46	3.42	1.16	1.14	1.14	1.14	1.14
	2.28		3.40		1.14				
			3.40						
103.30	2.32	2.34	3.40	3.40	1.28	1.28	1. 6	1. 6	1. 6
	2.36		3.40		1.28				
	2.28								
	2.34								
103.40	2.34	2.30	3. 6	3. 6	1.54	1.54	0.36	0.36	0.36
	2.30		3. 6		1.54				
	2.26								
	2.26								
	2.32								
103.45	2.40	2.30	2.50	2.50	2.10	2. 8	0.20	0.22	0.21
	2.30		2.52		2. 6				
	2.28		2.50		2. 4				
	2.30				2. 8				

Théodolite.	Zéro. Lectures.	Zéro. Moy.	1er sens du courant. Lectures.	1er sens du courant. Moy.	2e sens du courant. Lectures.	2e sens du courant. Moy.	Rotation. 1er sens.	Rotation. 2e sens.	Rotation. Moy.
103°47′	2°34′	2°34′	2°46′	2°50′	2°20′	2°22′	0°16′	0°12′	0°14′
	2.32		2 54		2.26				
	2.34		2.54		2.20				
	2.34		2.44		2.24				
	2.34		2.52		2.24				
			2.50		2.24				
			2.50		2.22				
103.49	2.34	2.34	2.46	2.40	2.30	2.28	0. 6	0. 6	0. 6
	2.34		2.36		2.26				
			2.40		2.30				
			2.38						

On voit d'abord, par ce Tableau, que les rotations à droite et à gauche correspondant aux deux sens du courant sont égales, résultat qui n'était pas évident *a priori* pour les cristaux.

J'ai tracé la courbe de ces résultats en prenant pour abscisses les divisions du cercle horizontal du théodolite, et pour ordonnées les rotations magnétiques.

Fig. 4.



pensais, *a priori*, obtenir une courbe asymptote à l'axe des abscisses. ontraire, elle semble tomber à zéro pour des valeurs finies de l'abscisse. tation, il est vrai, ne peut plus être mesurée lorsqu'elle devient inférieure à 4′ ou 5′; mais l'aspect général de la courbe ne laisse guère de

…s deux branches de droite et de gauche prolongées vont couper l'axe …bscisses aux deux points 102°21′ et 103°51′ environ. La moyenne 103°6′ …e la position correspondant à l'axe optique du cristal. La courbe est …trique par rapport à l'ordonnée de cette division.

…premier résultat amène naturellement à chercher la variation que su…a courbe pour diverses intensités du champ magnétique.

IV. — Deuxième série de mesures, relatives à diverses intensités du champ magnétique.

…ai cherché sous chaque incidence les valeurs de la rotation pour des …ants égaux successivement à 10, 15, 20, 30 et 40 ampères. Les nombres …nus sont donnés dans le Tableau ci-dessous; mais je n'y ai inscrit que …moyennes :

					Rotation		
[illegible]	Courant en ampères.	Zéro.	1er sens du courant.	2e sens du courant.	1er sens.	2e sens.	Moyenne.
[illegible]	10	2°.32′	2°.36′	2°.26′	0°. 4′	0°. 6′	0°. 5′
	15	2.26	2.30	2.18	0. 6	0. 6	0. 6
	20	2.28	2.34	2.20	0. 6	0. 8	0. 7
	30	2.28	2.36	2.20	0. 8	0. 8	0. 8
	40	2.32	2.42	2.24	0.10	0. 8	0. 9
[illegible]	10	2.32	2.40	2.24	0. 8	0. 8	0. 8
	15	2.32	2.42	2.20	0.10	0.12	0.11
	20	2.32	2.44	2.20	0.12	0.12	0.12
	30	2.32	2.50	2.16	0.18	0.16	0.17
	40	2.30	2.50	2.12	0.20	0.18	0.19
	10	2.26	2.42	2. 8	0.16	0.18	0.17
	15	2.32	2.56	2. 8	0.24	0.24	0.24
	20	2.32	3. 2	2. 2	0.30	0.30	0.30
	30	2.32	3.12	1.52	0.40	0.40	0.40
	40	2.30	3.16	1.40	0.46	0.50	0.48
	10	2.28	3. 2	1.54	0.34	0.34	0.34
	15	2.28	3.18	1.38	0.50	0.50	0.50
	20	2.28	3.32	1.26	1. 4	1. 2	1. 3
	30	2.28	3.54	1. 4	1.26	1.24	1.25
	40	2.32	4.16	0.52	1.44	1.40	1.42
	10	2.28	3. 8	1.48	0.40	0.40	0.40
	15	2.28	3.24	1.26	0.56	1. 2	0.59
	20	2.26	3.40	1.12	1.14	1.14	1.14
	30	2.26	4. 6	0.50	1.40	1.36	1.38
	40	2.28	4.22	0.34	1.54	1.54	1.54

Théodolite.	Courant en ampères.	Zéro.	1er sens du courant.	2e sens du courant.	Rotation 1er sens.	Rotation 2e sens.	Moyenne.
° '		° '	° '	° '	° '	° '	° '
103. 5	10	2.30	3.10	1.50	0.40	0.40	0.40
	15	2.30	3.30	1.30	1.00	1.00	1.00
	20	2.30	3.44	1.16	1.14	1.14	1.14
	30	2.30	4. 8	0.50	1.38	1.40	1.39
	40	2.32	4.32	0.36	2.00	1.56	1.58
103.20	10	2.28	3. 8	1.48	0.40	0.40	0 40
	15	2.28	3.28	1.30	1.00	0.58	0.59
	20	2.28	3.42	1.14	1.14	1.14	1.14
	30	2.28	4. 8	0.52	1.40	1.36	1.38
	40	2.30	4.24	0.34	1.54	1.56	1.55
103.30	10	2.30	3. 6	1.54	0.36	0.36	0.36
	15	2.34	3.28	1.40	0.54	0.54	0.54
	20	2.34	3.40	1.28	1. 6	1. 6	1. 6
	30	2.34	4. 4	1. 4	1.30	1.30	1.30
	40	2.32	4.16	0.44	1.44	1.48	1.46
103.40	10	2.30	2.50	2.10	0.20	0.20	0.20
	15	2.30	3.00	2.00	0.30	0.30	0.30
	20	2.30	3. 6	1.54	0.36	0.36	0.36
	30	2.30	3.20	1.40	0.50	0.50	0.50
	40	2.30	3.30	1.34	1.00	0.56	0.58
103.45	10	2.30	2.42	2.20	0.12	0.10	0.11
	15	2.30	2.48	2.14	0.18	0.16	0.17
	20	2.30	2.50	2. 8	0.20	0.22	0.21
	30	2.30	2.56	2. 4	0.26	0.26	0.26
	40	2.30	3.00	1.56	0.30	0.34	0.32
103.47	10	2.34	2.44	2.26	0.10	0. 8	0. 9
	15	2.32	2.44	2.22	0.12	0.10	0.11
	20	2.34	2.50	2.22	0.16	0.12	0.14
	30	2.32	2.52	2.16	0.20	0.16	0.18
	40	2.32	2.54	2.14	0.22	0.18	0.20
103.49	10	2.34	2.38	2.28	0. 4	0. 6	0. 5
	15	2.34	2.38	2.28	0. 4	0. 6	0. 5
	20	2.34	2.40	2.28	0. 6	0. 6	0. 6
	30	2.34	2.40	2.24	0. 6	0.10	0. 8
	40	2.34	2.42	2.22	0. 8	0.12	0.10

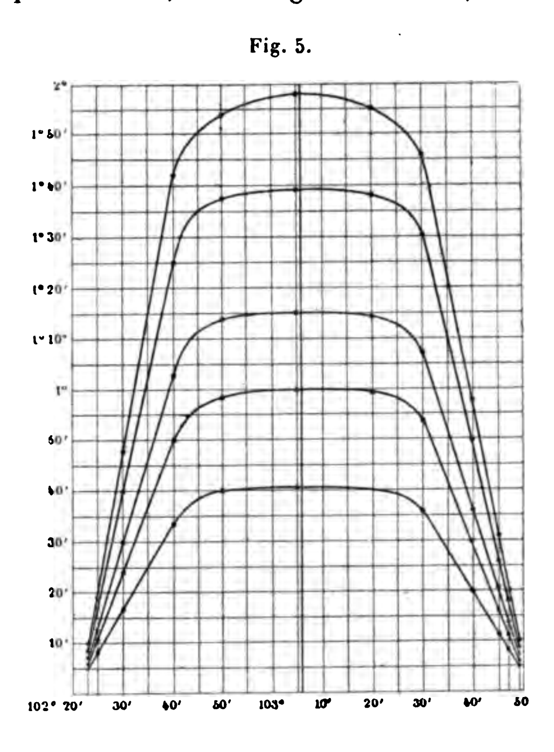
Voici les courbes de ces résultats :

Elles montrent que, si l'action du champ magnétique croît, l'action rotatoire ne s'étale pas en même temps à droite et à gauche de l'axe. Toutes les courbes prolongées viennent sensiblement couper la ligne des abscisses aux deux mêmes points. Il semble même que, à mesure que l'intensité magné-

tique croît, les deux points de rotation nulle se rapprochent un peu de l'axe optique. Entre 15 et 40 ampères, il semble y avoir un écart de 1 ou 2 minutes.

A l'examen de ces résultats, il ne semble guère douteux que l'action du champ magnétique s'étende, en changeant de sens, au delà des directions

Fig. 5.



de rotation nulle. C'est, en effet, ce à quoi m'a conduit une observation patiente du phénomène poursuivie à des intervalles très rapprochés.

Voici la série des mesures dans laquelle j'ai mis en évidence cet important résultat.

V. — Nouvelles mesures relatives à un courant d'intensité fixe.

Ces mesures sont relatives à un courant fixe de 25 ampères, courant qui n'échauffe pas trop rapidement l'électro-aimant. Le spath ayant été déplacé entre les séries précédentes et celle-ci, les divisions du cercle horizontal du théodolite ne se correspondent plus. Dans cette série, je ne me suis pas préoccupé des zéros, ce qui n'est pas nécessaire, comme je l'ai déjà expliqué.

Théodolite.	1er sens du courant.	2e sens du courant.	Demi-différence.	Théodolite.	1er sens du courant.	2e sens du courant.	Demi-différence.
° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′
101.28	2.34	2.34	0	103.30	4. 4	1.12	—1.26
101.32	2.42	2.34	—0. 4	103.40	4.00	1.18	+1.21
101.35	2.40	2.34	—0. 3	103.50	3.34	1.36	+0.59
101.37	2.36	2.36	0. 0	104. 1	3. 6	2.36	+0.15
101.40	2.20	2.28	—0. 4	104. 4	2.38	2.38	0. 0
101.43	2.26	2.36	—0. 5	104. 7	2.24	2.48	—0.12
101.45	2.24	2.32	—0. 4	104.12	2.22	2.56	—0.17
101.47	2.20	2.20	0. 0	104.15	2.26	2.52	—0.13
101.50	2.26	2.16	+0. 5	104.18	2.28	2.38	—0. 5
101.53	2.28	2.16	—0. 6	104.20	2.36	2.36	0. 0
101.55	2.34	2.26	—0. 4	104.22	2.44	2.32	+0. 6
101.57	2.36	2.36	0. 0	104.25	2.44	2.26	+0. 9
102.00	2.34	2.46	—0. 6	104.28	2.48	2.24	+0.12
102. 3	2.44	3. 2	—0. 9	104.31	2.50	2.32	+0. 9
102. 5	2.48	3. 2	—0. 7	104.34	2.40	2.40	0. 0
102. 8	2.56	2.56	0. 0	104.37	2.54	3. 8	—0. 7
102.12	3. 2	2.44	—0. 9	104.40	2.54	3.12	—0. 9
102.15	3. 2	2.38	—0.12	104.43	2.50	3.00	—0. 5
102.18	2.44	2.26	+0. 9	104 45	2.44	2.44	0. 0
102.22	2.32	2.32	0. 0	104.47	2.38	2.30	+0. 4
102.25	2.18	2.36	—0. 9	104.50	2.40	2.28	+0. 6
102.28	2.18	2.50	—0.16	104.53	2.24	2.16	+0. 4
102.30	2.46	3.20	—0.17	104.55	2.28	2.28	0. 0
102.35	3.20	3.36	—0. 8	104.57	2.32	2.26	—0. 3
102.38	3.28	3.28	0. 0	105.00	2.22	2.32	—0. 5
102.40	3.36	3.12	+0.12	105. 3	2.30	2.38	—0. 4
102.50	3.34	1.44	—0.55	105. 5	2.34	2.34	—0. 0
103.00	3.58	1.20	—1.19	105. 7	2.36	2.30	+0. 3
103.10	4. 4	1.12	—1.26	105.10	2.38	2.30	+0. 4
103.20	4. 6	1.10	+1.28	105.14	2.34	2.34	0. 0

En dehors de ces limites, les rotations sont trop petites pour être appréciées.

L'axe du cristal correspond sensiblement à la division 103°21′. On voit qu'à droite et à gauche les rotations passent, pour un même sens du courant, par des valeurs alternativement de sens contraires, et deviennent nulles pour une série de directions symétriques par rapport à l'axe. Ces directions sont réunies dans le Tableau suivant :

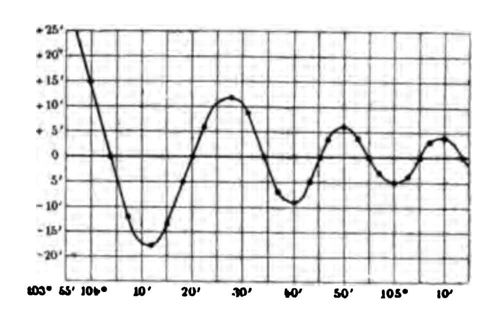
Direction de l'axe 103°21'.

Directions de rotations nulles d'un côté.	Distance à l'axe.	Distance des zéros entre eux.	Directions de rotations nulles de l'autre côté.	Distance à l'axe.	Distance des zéros entre eux.
102°.38'	0°.43'	16'	104°. 4'	0°.43'	16'
102.22	0.59	14	104.20	0.59	14
102. 8	1.13	11	104.34	1.13	11
101.57	1.24	10	104.45	1.24	10
101.47	1.34	10	104.55	1.34	10
101.37	1.44	9	105. 5	1.44	9
101.28	1.53		105.14	1.53	

On voit que, à mesure qu'on s'éloigne de l'axe, les zéros se rapprochent entre eux. Voici une partie de la courbe de ces résultats, tracée à partir du premier point de rotation nulle.

L'autre partie est symétrique par rapport à l'axe du cristal.

Fig. 6.



VI. — Mesures relatives à un spath plus épais.

Ces résultats sont relatifs à un spath de 26mm d'épaisseur.

Dans un cristal uniaxe, si b et a désignent les vitesses ordinaires et extraordinaires perpendiculairement à l'axe, la direction correspondant à une différence de marche $\frac{\lambda}{2}$ fait avec l'axe un angle I donné par la formule [1]

$$\sin \mathrm{I} = \sqrt{\frac{b\lambda}{\varepsilon(a^2 - b^2)}}.$$

[1] Verdet, *Leçons d'Optique physique*, t. II, p. 150.

Dans le spath, on a

$$a = \frac{1}{1,519}, \qquad b = \frac{1}{1,665};$$

de plus

$$\lambda = 0,000589 \quad \text{et} \quad \varepsilon = 26;$$

d'où

$$I = 47'.$$

Nous avons vu que la première direction de rotation nulle était à 43′ de l'axe. Elle est donc très voisine de la première frange, un peu plus rapprochée de l'axe que celle-ci. Lorsque l'épaisseur du cristal augmente, la première frange se rapproche de l'axe. Si le premier point de rotation nulle suit la première frange, il doit aussi se rapprocher de l'axe dans ces conditions. J'ai tenu à vérifier ce fait, et en même temps à confirmer les résultats ci-dessus sur un cristal plus épais que le précédent. Ce nouveau cristal avait 33mm d'épaisseur. Voici les résultats des mesures faites sur lui :

Distances à l'axe.	Rotations.	Distances à l'axe.	Rotations.
0°.0′	1°.52′	1°.6′	0°.0′
0.5	1.52	1.9	−0.8
0.10	1.50	1.12	−0.11
0.15	1.48	1.15	−0.7
0.20	1.44	1.17	0.0
0.25	1.24	1.19	+0.5
0.30	0.56	1.22	+0.9
0.35	0.26	1.25	+0.4
0.37	0.14	1.26	0.0
0.39	0.0	1.28	−0.5
0.42	−0.12	1.30	−0.7
0.45	−0.17	1.32	−0.5
0.51	−0.10	1.34	0 0
0.54	0.0	1.35	−0.3
0.56	+0.10	1.38	−0.5
1.00	+0.14	1.40	+0.2
1.4	+0.7	1.42	0.0

Les directions de rotation nulle sont réunies dans le Tableau ci-dessous :

Distance des zéros à l'axe.	Distance des zéros entre eux.
0°.39′	
	15′
0.54	
	12
1.6	
	10
1.17	
	9
1.26	
	8
1.34	
	8
1.42	

visions : à mesure que l'épaisseur
hent de l'axe.

gnétique ont les mêmes positions
l en dehors du champ magnétique.

ation

in I$\sqrt{K}$,

ge, et K l'ordre de la frange. En ap-
échantillons étudiés, on a

Cristal de 33mm d'épaisseur.

Zéros successifs observés.	Zéros successifs calculés.
0°.39'	
0.54	0°.55'
1. 6	1. 7
1.17	1.18
1.26	1.27
1.34	1.35
1.42	1.43

pas deux minutes, valeur de l'ordre des er-

Dans le spath, on a

$$a = \frac{1}{1,519}, \qquad b = \frac{1}{1,665};$$

de plus

$$\lambda = 0,000589 \quad \text{et} \quad \varepsilon = 26;$$

d'où

$$I = 47'.$$

Nous avons vu que la première direction de ro l'axe. Elle est donc très voisine de la premièr prochée de l'axe que celle-ci. Lorsque l'épaisse première frange se rapproche de l'axe. Si le pr suit la première frange, il doit aussi se rappro tions. J'ai tenu à vérifier ce fait, et en même t ci-dessus sur un cristal plus épais que le p avait 33^{mm} d'épaisseur. Voici les résultats d

Distances à l'axe.	Rotations.
0° 0'	1° 52'
0. 5	1.52
0.10	1.50
0.15	1.48
0.20	1.44
0.25	1.24
0.30	0.56
0.35	0.26
0.37	0.14
0.39	0. 0
0.42	−0.12
0.45	−0.17
0.51	−0.10
0.54	0. 0
0.56	+0.10
1.00	+0.14
1. 4	+0. 7

Les directions de rotation null

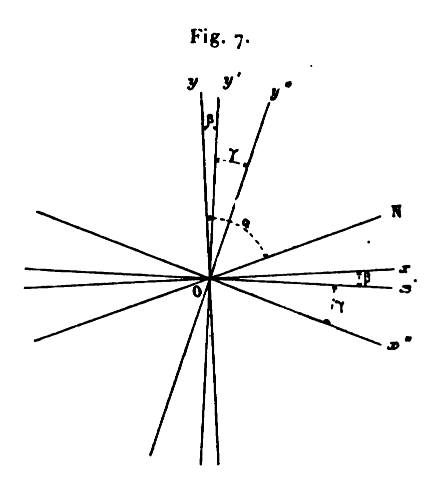
Distance des zéros à l'a
0° 39'
0.54
1. 6
1.17
1.26
1.34
1.42

k (*fig.* 2)
'. Ce cercle
ture que ce de
peuvent tour
ns dentés que c
roues dentées I
us, le quart d'o

monté dans un petit cadre à charnière L, peut être rabattu au devant de l'analyseur ou relevé à volonté.

On peut voir d'abord que, lorsque l'axe Oy de la lame demi-onde coïncide avec une vibration rectiligne incidente, si l'on fait tourner le quart

Fig. 7.



d'onde au devant de l'analyseur ainsi réglé, on peut rétablir l'égalité d'éclairement des deux moitiés du champ avec une sensibilité de même ordre qu'avec l'analyseur seul. Cette égalité est rétablie lorsque l'axe du quart d'onde coïncide avec l'axe de la lame demi-onde. Alors l'intensité commune est $\cos^2\alpha$, α étant l'angle de l'axe de la lame demi-onde et du nicol.

Faisons tourner le quart d'onde d'un petit angle β. La vibration rectiligne incidente Oy se transforme en vibration elliptique dont les axes sont Ox' et Oy', axes du quart d'onde.

Si $y = \cos 2\pi \frac{t}{T}$ est la vibration incidente Oy, les composantes suivant Ox' et Oy' sont

$$x' = -\sin\beta \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

$$y' = \quad \cos\beta \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

En traversant le quart d'onde, l'une des vibrations, y', par exemple, prend un retard $\frac{\pi}{2}$. A la sortie, on a donc

$$x' = -\sin\beta \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

$$y' = \quad \cos\beta \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

S

ANA

Pour compléter l'a
champ magnétique, i
tion sur la nature de
A priori, il était
port à l'axe du crist
former en vibration
fallait donc analyser
mantation.
Les méthodes o
de de Senarmont,
s'adaptaient pas s
Il est important, d
de même ordre q
de lumière jaune

En avant de l'a
monté sur un cerc
divisé sur tranche
nier, ainsi que l'in
séparément autour
mandent deux tiges
fixées sur l'une des

l'autre un retard δ et l'on a, par exemple,

$$y' = \frac{1}{1+k^2}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\delta}{\lambda}\right), \qquad y'' = \frac{k^2}{1+k^2}\sin 2\pi\frac{t}{T},$$

$$x' = \frac{k}{1+k^2}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\delta}{\lambda}\right), \qquad x'' = \frac{-k}{1+k^2}\cos 2\pi\frac{t}{T}.$$

A la sortie, ces deux elliptiques se recombinent :

$$Y = \frac{1}{1+k^2}\left[\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\delta}{\lambda}\right) + k^2 \sin 2\pi\frac{t}{T}\right] = \frac{B'}{1+k^2}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda}\right);$$

d'où

$$\cos 2\pi\frac{\delta}{\lambda} + k^2 = B'\cos 2\pi\frac{d}{\lambda},$$

$$\sin 2\pi\frac{\delta}{\lambda} \qquad = B'\sin 2\pi\frac{d}{\lambda};$$

on en déduit

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &B'^2 = 1 + k^4 + 2k^2\cos 2\pi\frac{\delta}{\lambda} \\ &\text{et} \\ &\tan 2\pi\frac{d}{\lambda} = \frac{\sin 2\pi\frac{\delta}{\lambda}}{k^2 + \cos 2\pi\frac{\delta}{\lambda}}. \end{aligned}\right.$$

De même

$$X = \frac{k}{1+k^2}\left[\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\delta}{\lambda}\right) - \cos 2\pi\frac{t}{T}\right] = \frac{kA'}{1+k^2}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d'}{\lambda}\right),$$

d'où

$$\cos 2\pi\frac{\delta}{\lambda} - 1 = A'\cos 2\pi\frac{d'}{\lambda},$$

$$\sin 2\pi\frac{\delta}{\lambda} = +A'\sin 2\pi\frac{d'}{\lambda};$$

on en déduit

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &A'^2 = 4\sin^2\pi\frac{\delta}{\lambda}, \\ &\tan 2\pi\frac{d'}{\lambda} = -\frac{\sin 2\pi\frac{\delta}{\lambda}}{1 - \cos 2\pi\frac{\delta}{\lambda}}. \end{aligned}\right.$$

Des groupes d'équations (1) et (2) on tire la valeur de $\frac{B'}{A'}$ et de

pendant que l'ellipse éprouve des variations de grandeur qui suivent une périodicité analogue.

Le long des bras de la croix d'un spath placé dans un champ magnétique et observé entre un polariseur et un analyseur à l'extinction, la lumière n'est donc pas éteinte : elle présente une série de maxima et de minima, c'est-à-dire précisément toutes les particularités offertes par le quartz. Dans ce dernier, les maxima correspondent également à des ellipses dont le grand axe est dirigé suivant la vibration incidente; les minima à des vibrations rectilignes parallèles à la vibration incidente. Entre ces directions particulières, l'ellipse issue du quartz a son grand axe dirigé périodiquement à droite et à gauche de la vibration primitive.

CHAPITRE III.

INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS.

Ces résultats peuvent être interprétés comme dans le quartz, suivant les conceptions d'Airy.

Lorsqu'un rayon rectiligne incident se présente sur un spath d'Islande placé dans un champ magnétique, il se transforme en deux elliptiques réciproques inverses qui se propagent avec des vitesses différentes. A la sortie, l'analyse optique donne le résultat de la recomposition de ces elliptiques après qu'ils ont subi l'un par rapport à l'autre une certaine différence de marche en traversant le cristal.

Soit $y = \sin 2\pi \frac{t}{T}$ la vibration incidente.

La décomposition en deux elliptiques inverses donne

$$y' = \frac{1}{1+k^2} \sin 2\pi \frac{t}{T}, \ \searrow \qquad y'' = \frac{k^2}{1+k^2} \sin 2\pi \frac{t}{T}, \ \nearrow$$
$$x' = \frac{k}{1+k^2} \cos 2\pi \frac{t}{T}, \qquad x'' = \frac{-k}{1+k^2} \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

En traversant le cristal aimanté, l'un des deux elliptiques prend sur

or

$$X = \quad x' \cos\alpha + y' \sin\alpha,$$
$$Y = - x' \sin\alpha + y' \cos\alpha;$$

d'où, par identification des valeurs de X et de Y,

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{kA'}{1+k^2} \cos 2\pi \frac{d'}{\lambda} &= A \cos\alpha, \\ \frac{kA'}{1+k^2} \sin 2\pi \frac{d'}{\lambda} &= B \sin\alpha, \\ \frac{B'}{1+k^2} \cos 2\pi \frac{d}{\lambda} &= B \cos\alpha, \\ \frac{B'}{1+k^2} \sin 2\pi \frac{d}{\lambda} &= A \sin\alpha. \end{aligned} \right.$$

De ces quatre équations, on tire $\frac{B'}{kA'}$ et $\cot 2\pi \frac{d'-d}{\lambda}$ en fonction de $\frac{A}{B}$ et de α.

Des deux premières, on déduit

$$\operatorname{tang} 2\pi \frac{d'}{\lambda} = \frac{B}{A} \operatorname{tang}\alpha.$$

Des deux dernières,

$$\operatorname{tang} 2\pi \frac{d}{\lambda} = \frac{A}{B} \operatorname{tang}\alpha;$$

d'où

$$\operatorname{tang} 2\pi \frac{d'-d}{\lambda} = \frac{\frac{B}{A}\operatorname{tang}\alpha - \frac{A}{B}\operatorname{tang}\alpha}{1 + \operatorname{tang}^2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\operatorname{tang} 2\varphi},$$

en posant $\frac{A}{B} = \operatorname{tang}\varphi$.

Dans les expériences actuelles, les angles α et φ sont très petits : on peut donc remplacer $\sin 2\alpha$ et $\operatorname{tang} 2\varphi$ par 2α et 2φ, ce qui donne

$$\operatorname{tang} 2\pi \frac{d'-d}{\lambda} = \frac{\alpha}{\varphi} \qquad \text{ou} \qquad \cot 2\pi \frac{d'-d}{\lambda} = \frac{\varphi}{\alpha} = n.$$

De même, en faisant la somme des carrés des deux premières équations du groupe 4, on a

$$\frac{k^2 A'^2}{(1+k^2)^2} = A^2 \cos^2\alpha + B^2 \sin^2\alpha$$

d'où

$$\frac{1}{k} - k = \frac{n}{\operatorname{tang}\pi\frac{\delta}{\lambda}} 2\sin\pi\frac{\delta}{\lambda}\sqrt{1+m^2} = 2n\cos\pi\frac{\delta}{\lambda}\sqrt{1+m^2}.$$

En remplaçant $\cos\pi\frac{\delta}{\lambda}$ par sa valeur tirée des équations (3″),

$$\frac{1}{k} - k = \frac{2mn}{\sqrt{1+n^2}},$$

ce qui donne

$$k = \pm\frac{mn}{\sqrt{1+n^2}} \pm \sqrt{1+\frac{m^2n^2}{1+n^2}}.$$

On obtient ainsi simultanément les deux valeurs k et $\frac{1}{k}$. En outre, on a

$$\operatorname{tang}^2\pi\frac{\delta}{\lambda} = n^2 + \frac{1+n^2}{m^2}.$$

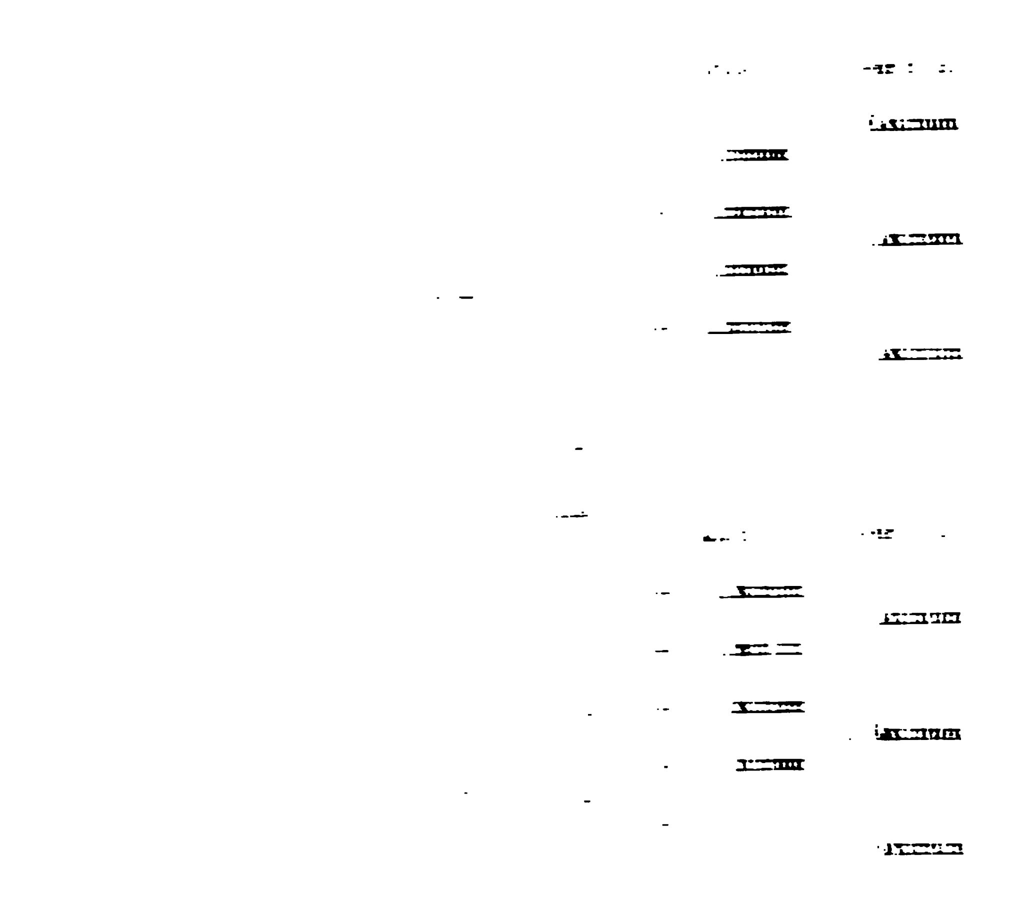
Le calcul des quantités k et δ peut donc s'effectuer facilement. Remplaçons m et n par leurs valeurs en φ et α; on a

$$(5)\qquad \begin{cases} k = \pm\dfrac{\varphi}{\alpha^2+\varphi^2} \pm \sqrt{1+\dfrac{\varphi^2}{(\alpha^2+\varphi^2)^2}}, \\ \operatorname{tang}^2\pi\dfrac{\delta}{\lambda} = \dfrac{\varphi^2+(\alpha^2+\varphi^2)^2}{\alpha^2}. \end{cases}$$

Suivant la direction de l'axe, on a $\varphi = 0$. Donc $k = 1$ et $\operatorname{tang} 2\pi\frac{\delta}{\lambda} = \alpha^2$ ou sensiblement $\pi\frac{\delta}{\lambda} = \alpha$. On sait en effet que, dans ce cas, la différence de phase $2\pi\frac{\delta}{\lambda}$ est double de α.

Lorsque φ n'est pas infiniment petit par rapport à α, c'est-à-dire à quelque distance de l'axe, les formules (5) peuvent être pratiquement simplifiées. En effet, dans ce cas, $(\alpha^2+\varphi^2)^2$ est très petit par rapport à φ^2; le quotient $\frac{\varphi^2}{(\alpha^2+\varphi^2)^2}$ est très grand. La racine carrée de $1+\frac{\varphi^2}{(\alpha^2+\varphi^2)^2}$ est sensiblement égale à $\frac{\varphi}{\alpha^2+\varphi^2}$, et l'une des valeurs de k est

$$k = \frac{2\varphi}{\alpha^2+\varphi^2}.$$



[illegible] proportionnelle [illegible] rotations [illegible] magnétique en fonction [illegible]. Il suffit donc de connaître [illegible] intensité particulière du courant [illegible] correspondant aux autres intensités.

Or, pour un courant de 25 ampères, la valeur absolue du champ magnétique, mesurée par la rotation du sulfure de carbone, a été trouvée égale à 1808 unités.

Fig. 8.

On en déduit le tableau suivant :

Courant en ampères.	Rotation.	Valeur absolue du champ magnétique.
10	1'.40	822 unités
15	1.00	1233 »
20	1.14	1521 »
25	1.28	1808 »
30	1.39	2034 »
40	1.58	2425 »

En dehors de l'axe optique du cristal, il y a en général rotation et production de lumière elliptique, sauf pour des incidences particulières. La rotation a lieu alternativement à droite et à gauche de la vibration incidente,

Tableau des valeurs des rapports des axes et des différences de marche pour une plaque de spath de 1mm d'épaisseur.

Épaisseur.	Incidence.	Rotation α.	Ellipse φ.	k.	$\tan \pi \frac{\delta}{\lambda}$.	$\pi \frac{\delta}{\lambda}$.	$\frac{\delta}{\lambda e}$.
	° ′	° ′	′				
26	0. 0	+1.28	0	1	»	1°28′	0,00031
33	0. 0	1.52	0	1	»	1°52′	0,00031
26	0. 9	1.26	2	0,435	0,034	1°57′	0,00041
33	0.10	1.50	5	0,316	0,055	3°8′	0,00053
26	0.14	1.24	7	0,144	0,084	4°48′	0,0010
33	0.15	1.48	17	0,103	0,16	9°5′	0,0015
26	0.19	1.21	21	0,055	0,26	14°34′	0,0031
33	0.20	1.44	40	0,045	0,38	20°48′	0,0035
33	0.25	1.24	52	0,026	0,62	31°48′	0,0053
26	0.29	0.59	37	0,019	0,62	31°48′	0,0068
33	0.30	0.56	55	0,015	0,98	44°25′	0,0075
33	0.35	0.26	56	0,0095	2,15	65°3′	0,0110
33	0.39	0. 0	56	0,0081	∞	90°	0,0151
26	0.40	0.15	44	0,0072	2,93	71°9′	0,0151
26	0.43	0. 0	44	0,0064	∞	90°	0,019
33	0.45	−0.17	36	0,0062	−2,12	180° − 64°45′ = 115°15′	0,019
26	0.51	−0.17	20	0,0050	−1,17	180° − 49°28′ = 130°32′	0,028
33	0.54	0. 0	0	»	0	180°	0,030
26	0.59	0. 0	0	»	0	180°	0,038
33	0.60	+0.14	8	0,0047	+0,57	180° + 29°41′ = 209°41′	0,035
33	1. 6	0. 0	20	0,0030	∞	270°	0,045
26	1. 7	+0.12	11	0,0034	+0,91	180° + 42°18′ = 222°18′	0,047
33	1.12	−0.11	10	0,0032	−0,91	360° − 42°18′ = 317°42′	0,053
26	1.13	0. 0	18	0,0026	∞	270°	0,057
33	1.17	0. 0	0	»	0	360°	0,060
26	1.19	−0. 9	9	0,0028	−1	360° − 45° = 315°	0,067
33	1.22	+0. 9	6	0,0028	+0,66	360° + 33°25′ = 393°25′	0,067
26	1.24	0. 0	0	»	0	360°	0,076
33	1.26	0. 0	14	0,0021	∞	360° + 90° = 450°	0,076
26	1.29	+0. 6	6	0,0018	+1	360° + 45° = 405°	0,086
33	1.30	−0. 7	6	0,0020	−0,86	540° − 40°41′ = 499°19′	0,084
33	1.34	0. 0	0	»	0	360° + 180° = 540°	0,091
26	1.34	0. 0	12	0,0017	∞	360° + 90° = 450°	0,096
33	1.38	+0. 5	5	0,0014	+1	540° + 45° = 585°	0,098
26	1.39	−0. 5	6	0,0014	−1,2	540° − 50°11′ = 489°49′	0,104
33	1.42	0. 0	7	0,0010	∞	540° + 90° = 630°	0,106
26	1.44	0. 0	0	»	0	360° + 180° = 540°	0,115
26	1.49	+0. 4	3	0,0012	+0,75	540° + 36°52′ = 576°52′	0,123
26	1.53	0. 0	6	0,0008	∞	540° + 90° = 630°	0,134

Dans une étude théorique publiée en 1885 (¹), M. Gouy, appliquant le principe de l'indépendance des effets simultanés aux phénomènes produits dans un milieu par l'action combinée du pouvoir rotatoire et de la double réfraction, montre que ce principe permet de retrouver l'hypothèse imaginée par Airy, et conduit à des relations simples entre les quantités k et δ et la rotation ω qui se superpose à la double réfraction φ sous chaque incidence.

Les relations données par M. Gouy sont

$$\frac{\omega}{\pi} = \varphi \frac{2k}{1-k^2} \quad (^2),$$

$$\frac{\omega}{\pi} = \delta \frac{2k}{1-k^2} \quad (^3).$$

La première relie directement le pouvoir rotatoire et la double réfraction. La deuxième donne le pouvoir rotatoire en fonction de k et δ seuls. Dans ces formules, les quantités $\frac{\omega}{\pi}$ et φ sont comptées en vibrations ou en ondes; ainsi, pour un quart d'onde et une rotation de 1°, on a

$$\varphi = \frac{1}{4}, \qquad \frac{\omega}{\pi} = \frac{1}{180}.$$

En calculant ces relations pour les valeurs du Tableau ci-dessus, on a :

(¹) *Journal de Physique*, 2ᵉ série, t. IV, p. 149.
(²) *Ibid.*, p. 154.
(³) *Ibid.*, p. 158.

Incidences.	$\frac{\omega}{\pi}=\varphi\frac{2k}{1-k^2}$.	$\frac{\omega}{\pi}=\delta\frac{2k}{1+k^2}$.	Incidences.	$\frac{\omega}{\pi}=\varphi\frac{2k}{1-k^2}$.	$\frac{\omega}{\pi}=\delta\frac{2k}{1+k^2}$.
0°.0′	»	0,00031	0°.60′	0,00029	0,00033
0.9	0,00074	0,00030	1.6	0,00023	0,00027
0.10	0,00060	0,00030	1.7	0,00027	0,00032
0.14	0,00049	0,00023	1.12	0,00029	0,00034
0.15	0,00040	0,00031	1.13	0,00024	0,00030
0.19	0,00034	0,00034	1.19	0,00030	0,00037
0.20	0,00031	0,00031	1.22	0,00023	0,00037
0.25	0,00028	0,00028	1.26	0,00027	0,00032
0.29	0,00027	0,00026	1.29	0,00025	0,00031
0.30	0,00023	0,00023	1.30	0,00028	0,00033
0.35	0,00020	0,00023	1.34	0,00026	0,00033
0.39	0,00021	0,00024	1.38	0,00023	0,00027
0.40	0,00020	0,00021	1.39	0,00024	0,00029
0.43	0,00021	0,00024	1.42	0,00018	0,00021
0.45	0,00022	0,00024	1.49	0,00023	0,00030
0.51	0,00022	0,00028	1.53	0,00018	0,00021

On voit que $\frac{\omega}{\pi}$, calculé par les deux formules, est sensiblement constant pour toutes les incidences. Le phénomène, interprété suivant les idées de M. Gouy, peut donc être considéré comme résultant de la superposition d'un pouvoir rotatoire magnétique uniforme à la double réfraction.

RÉSUMÉ.

J'ai établi dans ce travail les propriétés suivantes du spath d'Islande :

1° Ce cristal possède le pouvoir rotatoire magnétique non seulement suivant l'axe, mais aussi suivant les directions inclinées sur l'axe.

2° Suivant l'axe, l'action magnétique est une simple rotation de la vibration incidente.

3° Suivant les directions inclinées sur l'axe, l'action du champ produit en général à la fois une rotation et une transformation de la vibration rectiligne incidente en vibration elliptique.

4° La rotation change périodiquement de sens, en devenant nulle pour une série de directions particulières.

5° L'ellipse produite par le champ magnétique devient alternativement nulle et maximum pour les directions successives où la rotation est nulle.

J'ai montré comment ces résultats, analogues à ceux que présente le quartz naturel, pouvaient être interprétés suivant les conceptions d'Airy, et

comment des données expérimentales on pouvait déduire les valeurs de k et δ relatives aux différentes incidences.

Comment aussi, d'après les idées de M. Gouy, le phénomène pouvait être considéré comme résultant de la superposition d'un pouvoir rotatoire magnétique uniforme, à la double réfraction.

Ce travail m'a en outre conduit à adapter le polarimètre à pénombre à l'étude du pouvoir rotatoire des cristaux et, enfin, à une nouvelle méthode d'analyse des vibrations elliptiques.

Ce travail a été effectué à la Faculté des Sciences de Toulouse. Qu'il me soit permis d'adresser ici mes bien sincères remerciements à MM. Brillouin et Berson pour les facilités et les bienveillants conseils qu'ils m'ont donnés.

Je remercie également M. Baillaud, qui a bien voulu mettre à ma disposition un local à l'Observatoire pour y installer mes expériences.

SUR LES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES HOMOGÈNES DU SECOND ORDRE

A COEFFICIENTS CONSTANTS,

PAR M. P. APPELL.

1. Soit une équation différentielle

$$(1)\qquad \psi(y'', y', y) = 0,$$

dont le premier membre est un polynôme homogène irréductible par rapport à une fonction y de la variable x et à ses dérivées y', y'' : les coefficients de ce polynôme sont supposés *constants*, c'est-à-dire indépendants de x. L'intégration de l'équation se ramène immédiatement aux quadratures : il suffit, en effet, de poser

$$y = e^{\int u\,dx}, \qquad y' = uy, \qquad y'' = (u^2 + u')y$$

pour obtenir une équation du premier ordre

$$(2)\qquad \psi(u^2 + u', u, 1) = 0$$

donnant x en fonction de u par une intégrale abélienne.

Ainsi qu'on le fait pour les équations linéaires et homogènes, on peut trouver des solutions de l'équation (1) ayant la forme spéciale

$$y = Ce^{rx},$$

C désignant une constante arbitraire et r une constante, racine de l'équation

$$(3)\qquad \varphi_n(r) = \psi(r^2, r, 1) = 0.$$

Dans le cas des équations linéaires, les solutions ainsi obtenues sont toutes *particulières :* on peut se demander s'il en est encore ainsi lorsque l'équation différentielle homogène n'est plus linéaire.

Nous allons montrer que certaines de ces intégrales peuvent être *particulières*, d'autres *singulières*, en donnant en même temps le moyen de reconnaître si une de ces intégrales est particulière ou singulière. On verra que, dans des cas limites, toutes les intégrales de la forme

$$y = Ce^{rx}$$

peuvent être particulières, ou toutes singulières [1].

2. L'équation (2) obtenue en faisant

$$y = e^{\int u\,dx}$$

est de la forme

$$(3) \qquad u'^n \varphi_0(u) + u'^{n-1}\varphi_1(u) + \ldots + u'\varphi_{n-1}(u) + \varphi_n(u) = 0,$$

où $\varphi_0(u)$, $\varphi_1(u)$, ..., $\varphi_n(u)$ sont des polynômes, dont le dernier $\varphi_n(u)$ a pour racines les constantes r donnant les solutions

$$y = Ce^{rx}.$$

Soit r une racine de $\varphi_n(u)$: il est évident que

$$u = r$$

sera une intégrale de l'équation (3); il s'agit de voir si cette intégrale doit être regardée comme particulière ou comme singulière.

Lorsque l'on fait $u = r$, l'équation (3) en u' a au moins une racine nulle. Supposons d'abord qu'elle n'en ait qu'une, c'est-à-dire que la valeur $u = r$ n'annule pas $\varphi_{n-1}(u)$: alors l'intégrale $u = r$ est *particulière* par rapport à la branche de la fonction intégrale dont la dérivée s'annule pour $u = r$. En effet, comme pour $u = r$ une seule valeur de u' s'annule, cette valeur est, pour des valeurs de u voisines de r, développable en une série de la forme [2]

$$u' = a(u-r)^p[1 + a_1(u-r) + a_2(u-r)^2 + \ldots],$$

---

[1] Pour la théorie des intégrales singulières des équations du premier ordre, consulter les travaux de MM. Darboux (*Comptes rendus*, 1870) et Cayley (*Messenger of Mathematics*, 1872, 1876) et une Note de M. Kapteyn (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1888). Pour les intégrales singulières des équations du second ordre, nous signalerons un travail de M. Goursat (*American Journal*, t. XII).

[2] *Voir* Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, Livre V.

p étant un entier positif. On tire de là

$$a\,dx = \frac{du}{(u-r)^p}[1 + A_1(u-r) + A_2(u-r)^2 + \ldots]$$

et, en cherchant l'intégrale qui se réduit à u_0 pour $x = 0$,

$$(4) \qquad a x = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{A_s}{s-p+1}[(u-r)^{s-p+1} - (u_0 - r)^{s-p+1}],$$

où $A_0 = 1$ et où le terme correspondant à $s = p - 1$ doit être remplacé par

$$A_{p-1} \log \frac{u-r}{u_0 - r}.$$

En écrivant cette intégrale

$$\begin{aligned} a x (u-r)^{p-1}(u_0-r)^{p-1} \\ = \frac{(u-r)^{p-1} - (u_0 - r)^{p-1}}{p-1} \\ + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{A_s}{s-p+1}[(u-r)^s(u_0-r)^{p-1} - (u_0-r)^s(u-r)^{p-1}], \end{aligned}$$

on voit que, lorsque u_0 tend vers r, tous les termes s'annulent, excepté $(u-r)^{p-1}$: on trouve donc, en faisant tendre u_0 vers r,

$$(u-r)^{p-1} = 0, \qquad u = r;$$

ce qui montre que $u = r$ est bien une intégrale *particulière* pour la branche considérée de l'intégrale générale. On verra sans peine comment il faudra modifier le calcul précédent dans le cas particulier où $p = 1$; les premiers termes du développement (4) sont alors des logarithmes; la conclusion subsiste, $u = r$ est intégrale *particulière*.

Supposons maintenant que la valeur considérée $u = r$ annule non seulement $\varphi_n(u)$, mais aussi $\varphi_{n-1}(u)$, $\varphi_{n-2}(u)$, ... Alors, quand u tend vers r, plusieurs des valeurs de u' définies par l'équation

$$u'^n \varphi_0(u) + u'^{n-1} \varphi_1(u) + \ldots + u' \varphi_{n-1}(u) + \varphi_n(u) = 0$$

tendent vers zéro. Ces valeurs se partagent en systèmes circulaires composés de racines qui se permutent dans le voisinage de $u = r$. Pour l'un de

[illegible]

[illegible] on vérifiera par un calcul identique au [illegible]

[illegible] *particulière*, pour la branche de la [illegible] satisfaisant à l'équation [illegible].

[illegible] comme une intégrale *singulière*.

[illegible] l'intégrale u qui se réduit à u_0 pour [illegible] ne tend pas vers $u = r$ quand u_0 [illegible] comme plus haut : écrivons

[illegible]

[illegible] tous les exposants du [illegible] si donc on fait tendre u_0 vers [illegible] vers la fonction u définie par l'équation

[illegible]

[illegible] pas du tout $u = r$. L'intégrale $u = r$ est donc *singulière*. [illegible] également à cette conclusion en faisant dans l'équation (5) la

substitution

$$u - r = v^q.$$

Il peut, d'après cela, arriver qu'une même solution $u = r$ doit être envisagée comme particulière ou comme singulière, suivant qu'on la compare à l'une ou à l'autre des branches de la fonction intégrale.

Les règles précédentes permettront de reconnaître facilement si une solution $u = r$ est particulière ou singulière. Par exemple, si l'équation

$$u'^n \varphi_0(u) + u'^{n-1}\varphi_1(u) + \ldots + u'\varphi_{n-1}(u) + \varphi_0(u) = 0$$

est telle que l'intégrale abélienne

$$x = \int \frac{du}{u'}$$

soit de première espèce, c'est-à-dire reste partout finie, toutes les solutions de la forme $u = r$ seront *singulières*.

3. Si nous revenons aux équations algébriques homogènes à coefficients constants en y, y', y'',

$$\psi(y'', y', y) = 0,$$

nous sommes maintenant en mesure de reconnaître, parmi les intégrales de la forme

$$y = Ce^{rx},$$

celles qui sont particulières et celles qui sont singulières. Nous allons traiter comme exemple le cas le plus simple, à savoir le cas d'une équation homogène du second ordre et du second degré

$$(6) \qquad \psi(y'', y', y) = a_0 y''^2 + a_2 y'^2 + a_4 y^2 + 2b_1 y' y'' + 2b_2 y'' y + 2b_3 y y' = 0,$$

les coefficients a_0, a_2, a_4, b_1, b_2, b_3 étant supposés constants. Cette équation admet des intégrales de la forme

$$y = Ce^{rx},$$

r étant racine de l'équation de quatrième degré

$$\varphi_2(r) = a_0 r^4 + 2b_1 r^3 + (a_2 + 2b_2) r^2 + 2b_3 r + a_4 = 0.$$

Si nous faisons

$$y = e^{\int u\,dx}, \qquad y' = uy, \qquad y'' = (u' + u^2)y,$$

l'équation différentielle devient

$$a_0 u'^2 + 2u'(a_0 u^2 + b_1 u + b_2) + \varphi_2(u) = 0.$$

Dans le cas particulier où $a_0 = 0$, cette équation est du premier degré en u'; les trois valeurs de u qui annulent $\varphi_2(u)$ donnent alors des intégrales *particulières*.

Supposons maintenant a_0 différent de zéro. Si aucune des racines du polynôme du quatrième degré $\varphi_2(u)$ n'annule le trinôme

$$\varphi_1(u) = a_0 u^2 + b_1 u + b_2,$$

les quatre intégrales obtenues en égalant u à l'une des racines de $\varphi_2(u)$ sont *particulières;* les solutions de la forme

$$y = Ce^{rx}$$

de l'équation (6) sont donc toutes *particulières*. Si une racine simple de $\varphi_2(u)$ annule le trinôme $\varphi_1(u)$, la solution correspondante est *singulière;* les autres sont *particulières*.

Si deux racines simples de $\varphi_2(u)$ annulent le trinôme $\varphi_1(u)$, les deux intégrales correspondantes sont *singulières;* les deux autres sont *particulières*.

4. Ce dernier cas est remarquable en ce que l'intégrale générale peut se mettre, dans ce cas, sous une forme particulièrement simple. En effet, puisque $\varphi_2(u)$ est divisible par $\varphi_1(u)$, on peut écrire

$$\varphi_2(u) = \varphi_1(u)(u^2 + 2\alpha u + \beta)$$

ou, en développant et identifiant,

$$b_1 = 2\alpha a_0, \qquad a_4 = \beta b_2, \qquad \dots.$$

Cela posé, l'équation en u

$$a_0 u'^2 + 2u' \varphi_1(u) + \varphi_2(u) = 0$$

s'écrit en divisant tous les termes par a_0, remplaçant $\varphi_2(u)$ par sa valeur

$$\varphi_1(u)(u^2 + 2\alpha u + \beta),$$

et posant $\frac{b_2}{a_0} = \gamma$,

$$(7) \qquad u'^2 + 2u'(u^2 + 2\alpha u + \gamma) + (u^2 + 2\alpha u + \beta)(u^2 + 2\alpha u + \gamma) = 0.$$

valeur qui est bien constante. Si donc on établit entre C, C′, C″ la relation

$$4(\beta'-\gamma')C'C''+\gamma' C^2=0,$$

l'expression (10) est l'intégrale générale de l'équation. Faisons, pour simplifier,

$$C'=\lambda^2, \qquad C''=\mu^2, \qquad C=2\sqrt{1-\frac{\beta'}{\gamma'}}\lambda\mu,$$

nous verrons que l'intégrale générale de l'équation (8) en z est

$$z=2\sqrt{1-\frac{\beta'}{\gamma'}}\lambda\mu+\lambda^2 e^{(r'+\alpha)x}+\mu^2 e^{(r''+\alpha)x},$$

et, par suite, celle de l'équation en y,

$$y=2\sqrt{1-\frac{\beta'}{\gamma'}}\lambda\mu e^{-\alpha x}+\lambda^2 e^{r'x}+\mu^2 e^{r''x} \tag{11}$$

avec deux constantes arbitraires λ et μ. Sur cette forme de l'intégrale générale, on voit bien que $e^{r'x}$ et $e^{r''x}$ sont des intégrales particulières correspondant à $\mu=0$ et $\lambda=0$.

Nous avons obtenu cette intégrale générale en égalant à zéro le premier facteur de l'expression de $\frac{d\chi}{dx}$ (9). Si nous égalons à zéro l'autre facteur

$$z''+\gamma' z=0,$$

nous aurons une équation du second ordre ayant pour intégrale générale

$$z=g' e^{x\sqrt{-\gamma'}}+g'' e^{-x\sqrt{-\gamma'}} \tag{12}$$

ou encore

$$z=g' e^{(\rho'+\alpha)x}+g'' e^{(\rho''+\alpha)x}, \tag{12'}$$

puisque nous avons appelé ρ' et ρ'' les racines de l'équation

$$r^2+2\alpha+\gamma=0, \qquad (r+\alpha)^2+\gamma'=0.$$

Si l'on substitue cette valeur de z dans l'expression $\chi(z'', z', z)$, cette expression deviendra encore une constante, puisque l'on aura encore

$$\frac{d\chi}{dx}=0,$$

[illegible]

on en déduit, pour l'équation différentielle proposée, les deux intégrales

$$y = z' e^{\dots}, \quad y = z'' e^{\dots}$$

qui sont *singulières*, comme nous l'avons vu.

L'équation que nous venons d'étudier rentre dans une catégorie générale d'équations différentielles dont nous nous sommes occupés précédemment dans une Note insérée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (second semestre 1888) et dans un Mémoire *Sur les invariants de quelques équations différentielles*, publié dans le *Journal de Mathématiques* (4e série, t. V, 1889).

Remarque I. — Nous avons supposé les racines r' et r'' de l'équation

$$r^2 + 2\alpha r + \beta = 0$$

distinctes, c'est-à-dire

$$\beta' = \beta - \alpha^2$$

différent de zéro. Si l'on avait $\beta' = 0$, l'équation $\chi(z'', z', z) = 0$ deviendrait

$$\chi(z'', z', z) = z''^2 + \gamma'(2zz'' - z'^2) = 0;$$

d'où

$$\frac{d\chi}{dx} = 2z'''(z'' + \gamma' z) = 0.$$

Prenant d'abord $z''' = 0$, on a

$$(13) \qquad z = C + C'x + C''x^2$$

et, en portant dans $\chi(z'', z', z)$,

$$\chi(z'', z', z) = 4C''(C'' + \gamma' C) - \gamma' C'^2.$$

Si donc on fait

$$C'' = \gamma'\lambda^2, \qquad C'' + \gamma' C = \mu^2, \qquad C' = 2\lambda\mu,$$

l'expression (13), c'est-à-dire

$$z = \frac{\mu^2 - \gamma'\lambda^2}{\gamma'} + 2\lambda\mu x + \gamma'\lambda^2 x^2,$$

est l'intégrale générale de l'équation $\chi = 0$ avec deux constantes arbitraires λ et μ.

L'intégrale générale de l'équation en y est

$$y = z e^{-\alpha x}.$$

Comme plus haut, les solutions

$$z = g' e^{x\sqrt{-\Upsilon}}, \qquad z = g'' e^{-x\sqrt{-\Upsilon}}$$

sont *singulières*.

Remarque II. — Nous avons supposé les racines ρ' et ρ'' de l'équation

$$r^2 + 2\alpha r + \gamma = 0$$

distinctes, c'est-à-dire $\gamma' = \gamma - \alpha^2$ différent de zéro. Si γ' était nul, l'équation

$$\chi(z'', z', z) = z''^2 + \beta' z'^2 = 0$$

ne serait plus irréductible et se décomposerait en deux facteurs linéaires

$$(z' - z\sqrt{-\beta})(z' - z\sqrt{-\beta}) = 0;$$

il en serait de même de l'équation proposée en y.

Enfin nous avons supposé β différent de γ. Si l'on avait

$$\beta = \gamma,$$

on aurait

$$[\text{illegible}] = z'^2 - 2\beta zz' - \beta^2 z^2 = (z' - \beta z)^2 = 0,$$

et le premier membre de cette équation serait le carré d'une fonction linéaire.

En revenant à l'équation en u

$$a_0 u'^2 - 3u' \varphi_1(u) - \varphi_2(u) = 0,$$

Il resterait à examiner quelques cas particuliers, par exemple le cas où une racine simple de $\varphi_1(u)$ serait double ou triple pour $\varphi_2(u)$. Mais l'examen de ce cas, qui, d'après la théorie générale, ne présente aucune difficulté, n'offre pas d'intérêt particulier.

ÉTUDE
SUR L'ÉLECTROLYSE,

PAR

G. BERSON,

Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse,

ET

A. DESTREM,

Professeur-adjoint à la même Faculté.

I. — Électrolyse de dissolutions d'acide sulfurique à titres déterminés.

Nous nous sommes proposé d'étudier les actions secondaires qui se produisent lorsqu'une lame de cuivre constitue l'électrode positive soluble.

Dans une première série d'expériences, nous avons fait varier la concentration de la liqueur acide, à partir de la solution décime jusqu'à la solution à un demi-équivalent par litre.

Dans ces circonstances, il ne s'est jamais dégagé d'oxygène sur l'électrode positive, le cuivre s'est transformé en oxyde qui s'est dissous dans l'acide sulfurique pour former du sulfate de cuivre.

Grâce au dispositif employé, qui empêchait, en partie, les liqueurs de se mélanger dans l'électrolyte pendant le temps que durait l'expérience, il n'y avait pas de dépôt de cuivre sur la lame de platine placée au pôle négatif. (Dans une expérience seulement, ce dépôt a été apparent, mais les résultats généraux n'ont pas été modifiés pour cela.)

Pour effectuer l'électrolyse, nous nous sommes servis de 4 éléments Daniell.

Les volumes d'hydrogène sont donnés avec les corrections de température et de pression.

La lame de cuivre a été pesée dans chaque expérience, après avoir été soigneusement desséchée.

Électrolyse de la liqueur à $\frac{1}{10}$ d'équivalent par litre.

(Durée de l'expérience : $2^h 38^m$.)

Volume de l'hydrogène	19^{cc},18
Poids correspondant	0^{gr},00171
Perte de poids de la lame de cuivre	0^{gr},0565
Poids du cuivre correspondant au poids d'hydrogène	0^{gr},0545

Intensité moyenne (1) du courant = 12

Électrolyse de la liqueur à $\frac{2}{10}$ d'équivalent par litre.

(Durée de l'expérience : $1^h 21^m$.)

Volume de l'hydrogène	18^{cc},09
Poids correspondant	0^{gr},00162
Perte de poids de la lame de cuivre	0^{gr},0525
Poids du cuivre correspondant au poids d'hydrogène	0^{gr},0514

Intensité moyenne du courant = 22

Électrolyse de la liqueur à $\frac{3}{10}$ d'équivalent par litre.

(Durée de l'expérience : $1^h 7^m$.)

Volume de l'hydrogène	18^{cc},56
Poids correspondant	0^{gr},00166
Perte de poids de la lame de cuivre	0^{gr},0550
Poids du cuivre correspondant au poids d'hydrogène	0^{gr},0528

Intensité moyenne du courant = 27

Électrolyse de la liqueur à $\frac{4}{10}$ d'équivalent par litre.

(Durée de l'expérience : $0^h 54^m$.)

Volume de l'hydrogène	18^{cc},39
Poids correspondant	0^{gr},00164
Perte de poids de la lame de cuivre	0^{gr},0535
Poids du cuivre correspondant au poids d'hydrogène	0^{gr},0523

Intensité moyenne du courant = 34

Électrolyse de la liqueur à $\frac{5}{10}$ d'équivalent par litre.

(Durée de l'expérience : $0^h 46^m$.)

Volume de l'hydrogène	18^{cc},94
Poids correspondant	0^{gr},00169
Perte de poids de la lame de cuivre	0^{gr},0550
Poids du cuivre correspondant au poids d'hydrogène	0^{gr},0539

Intensité moyenne du courant = 41

(1) L'intensité moyenne du courant est calculée d'après le volume de l'hydrogène obtenu pendant la durée de l'expérience.

Il résulte de cette première série d'expériences que la perte de poids de cuivre s'est toujours trouvée supérieure à ce qu'elle devait être théoriquement comparée au poids d'hydrogène.

Cette différence entre les poids théoriques et les poids trouvés varie de $\frac{20}{1000}$ à $\frac{40}{1000}$, différence due à la forme de l'électrode négative platine qui, de surface assez grande, absorbait une certaine quantité d'hydrogène.

Pour obvier à cet inconvénient, on s'est servi, dans une autre série d'expériences, d'une électrode platine à la Wollaston; dans ce cas, la différence entre la perte de poids théorique du cuivre et la perte de poids trouvée n'est plus que de $\frac{5}{1000}$ à $\frac{6}{1000}$.

Électrolyse de la liqueur normale, 1 *équivalent par litre, par* 10 *éléments Bunsen plats.*

(Durée de l'expérience : $1^h 16^m$.)

Volume de l'hydrogène	$175^{cc},9$
Poids correspondant	$0^{gr},01714$
Perte de poids du cuivre	$0^{gr},4915$
Poids du cuivre correspondant au poids d'hydrogène ...	$0^{gr},4880$

Intensité moyenne du courant = 231.

Dans tous les cas, comme le démontrent ces expériences, pour des liqueurs d'acide sulfurique ne dépassant pas une concentration d'un équivalent par litre et pour des forces électromotrices variant dans des limites considérables, dans le cas d'une électrode positive soluble cuivre, les actions secondaires, dans l'électrolyte, se résument à la combinaison de l'oxygène au cuivre pour former de l'oxyde de cuivre qui se dissout dans la liqueur acide.

Nous aurons, dans une prochaine Note, à nous occuper des liqueurs acides plus concentrées.

II. — Électrolyse de dissolutions d'acide acétique à titres déterminés.

Dans ces expériences, on a étudié les actions secondaires produites dans l'électrolyte, en faisant varier la force électromotrice, et la dilution des liqueurs, les électrodes étant insolubles et formées de deux lames de platine.

La quantité proportionnelle des produits provenant des actions secon-

daires dépend des proportions relatives d'eau et d'acide acétique électrolysées.

En effet, trois cas peuvent se présenter :

1° L'eau seule est électrolysée.

2° L'acide acétique seul est électrolysé.

3° Des proportions relatives d'eau et d'acide sont électrolysées.

En faisant varier, comme nous l'avons fait dans nos expériences, la dilution de la liqueur acide de $\frac{1}{2}$ équivalent par litre à 10 équivalents, c'est toujours le troisième cas qui s'est produit, mais dans des proportions bien différentes, eu égard à la force électromotrice employée et à la dilution de la liqueur acide.

La masse totale gazeuse provenant de ces électrolyses était constituée, dans tous les cas, d'hydrogène, d'oxygène, d'acide carbonique et d'hydrure d'éthylène, mais en proportions variables, servant précisément à mesurer les actions secondaires [1] :

L'hydrogène au pôle négatif provenant de la double électrolyse eau et acide,

$$H^2O = (-)H^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Theta(+)$$
$$2(\mathrm{C}^2H^4\Theta^2) = (-)H^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2(\mathrm{C}^2H^3\Theta^2)(+);$$

L'acide carbonique et l'hydrure d'éthylène provenant du dédoublement du résidu acide ($\mathrm{C}^2H^3\Theta^2$) au pôle positif, d'après l'équation

$$2(C^2H^3\Theta^2) = \mathrm{C}^2H^6 + C^2O^4. \tag{1}$$

Après s'être assuré que le gaz contenu dans l'éprouvette placée au-dessus de l'électrode négative était bien de l'hydrogène, on a soumis à l'analyse le gaz recueilli à l'électrode positive.

Les nombres indiquant en centimètres cubes les proportions relatives des différents gaz sont donnés pour un volume de gaz hydrogène ramené à 20^{cc}.

Les quantités d'hydrure d'éthylène étant corrélatives à celles d'acide carbonique produit d'après l'équation (1), nous nous contenterons de donner les nombres se rapportant à l'oxygène et à l'acide carbonique.

---

[1] L'oxygène a été absorbé par l'hydrosulfite de soude ou le pyrogallate de potasse, l'acide carbonique par la potasse, l'hydrure d'éthylène par l'alcool bouilli.

nce de la force électromotrice pour un titre donné.

Titre : 4 équivalents par litre.

Force électromotrice.	O.	CO^2.
3,3	8,16	1,05
5,7	6,92	1,38
7,6	2,64	2,95
11,4	0,96	4,6
15,2	1,10	5,5
19,0	0,91	6,0
38,0	0,59	5,91

ès le Tableau, que, pour une liqueur contenant 4 équivatique par litre, la décomposition électrolytique varie d'une jusqu'à une force électromotrice égale à 38.

our de faibles forces électromotrices, l'électrolyse de l'eau nd à donner les volumes gazeux se rapprochant de sa com-e cas, au contraire, de forces électromotrices croissantes, l'acide acétique tend à devenir prépondérante, et l'acide car-me que l'hydrure d'éthylène pouvant servir de mesure à tion, s'accroissent progressivement.

sse à une dissolution plus étendue d'acide acétique, soit r litre, la décomposition ne s'effectue plus de la même ma-ntités d'oxygène et d'acide carbonique mises en liberté sont lle que soit la force électromotrice employée, ou du moins t sont comparables, dans tous les cas, aux valeurs trouvées, e précédente, pour les forces électromotrices faibles.

Titre : 1 équivalent par litre.

Force électromotrice.	O.	CO^2.
13,3	8,9	0,4
19,0	8,84	0,2
38,0	8,53	0,3

it, l'électrolyse de l'eau prédomine, et les actions secon-à peu de chose.

à une dissolution concentrée, c'est-à-dire à 10 équivalents remarque que la quantité d'oxygène reste à peu près

constante pour des forces électromotrices croissantes, tandis que la quantité d'acide carbonique croît progressivement.

Titre : 10 équivalents par litre.

Force électromotrice.	O.	CO^2.
7,6	1,6	3,2
11,4	0,8	4,1
19	1,2	4,1
38	0,8	5,2
76	1,5	7,15

Dans ce cas, la proportion d'eau électrolysée fournissant l'oxygène au pôle positif est toujours la même, tandis que la quantité d'acide acétique décomposée croît avec la force électromotrice.

Nous avons vu qu'il n'en était pas ainsi lorsqu'on s'adresse à des dissolutions de concentration moindre.

2° *Influence de la dilution pour une force électromotrice donnée.*

Pour une même force électromotrice, les actions secondaires effectuées dans l'électrolyte varient avec la dilution des liqueurs et augmentent avec la concentration.

Ainsi la force électromotrice étant donnée, mesurons les quantités d'acide carbonique formées dans les différentes liqueurs.

Force électromotrice = 19.

	CO^2.
Dissolutions à 1 équivalent	0,15
» à 3 équivalents	3,25
» à 4 »	3,60
» à 10 »	4,93

Force électromotrice = 38.

Dissolutions à 1 équivalent	0,27
» à 3 équivalents	2,91
» à 4 »	3,1
» à 10 »	5,21

Cette dernière remarque n'est que la vérification d'un fait prévu, car il est évident que, la quantité d'acide augmentant, l'électrolyse de l'acide primera de plus en plus jusqu'à ce qu'elle devienne totale pour l'acide pur.

III. — Électrolyse de dissolutions de potasse à titres déterminés.

Dans cette série d'expériences sur l'électrolyse des dissolutions alcalines et en particulier des dissolutions de potasse, nous avons étudié en même temps l'influence de la force électromotrice, de la concentration des liqueurs employées et de la qualité des électrodes sur les actions secondaires produites dans l'électrolyte.

1° Électrodes insolubles.

Lorsqu'on soumet à l'électrolyse une solution aqueuse de potasse, en prenant pour électrodes des lames de platine, on constate toujours que le volume d'oxygène observé est inférieur à la moitié du volume d'hydrogène mesuré, quoique ce dernier soit lui-même inférieur au volume de l'hydrogène réellement produit, en raison de son absorption par le platine.

Ainsi nous avons trouvé, en soumettant à l'électrolyse une dissolution de potasse contenant $\frac{1}{7,3}$ d'équivalent par litre, les nombres suivants pour des forces électromotrices variant entre 4 daniells et 8 bunsens.

Électrolyse ayant duré $31^h 30^m$.

A l'électrode (+)............................ O = 7,8
» (−)............................ H = 17,0

$$\frac{17}{2} - 7,8 = 0,7, \qquad \frac{H}{O} = \frac{17}{7,8} = 2,18.$$

Électrolyse ayant duré 17^h.

A l'électrode (+)............................ O = 1,9
» (−)............................ H = 5,2

$$\frac{5,2}{2} - 1,9 = 0,7, \qquad \frac{H}{O} = \frac{5,2}{1,9} = 2,73.$$

Électrolyse ayant duré $3^h 10^m$.

A l'électrode (+)............................ O = 8,0
» (−)............................ H = 17,0

$$\frac{17}{2} - 8 = 0,5, \qquad \frac{H}{O} = \frac{17}{8} = 2,12.$$

Électrolyse ayant duré 1^h16.

A l'électrode (+)............................. O = 2,8
» (−)............................. H = 6,3

$$\frac{6,3}{2} - 2,8 = 0,35, \qquad \frac{H}{O} = \frac{6,3}{2,8} = 2,25.$$

La moyenne du rapport du volume d'hydrogène et d'oxygène est donc de 2,32; mais on peut atténuer dans une certaine mesure cette perturbation dans la production de l'oxygène, en modifiant la surface des électrodes et en remplaçant les lames de platine par des électrodes à la Wollaston.

C'est ce que prouvent les expériences suivantes :

Électrolyse ayant duré 5^h35^m.

A l'électrode (+)............................. O = 8,3
» (−)............................. H = 17,2

$$\frac{17,2}{2} - 8,3 = 0,3, \qquad \frac{H}{O} = \frac{17,2}{8,3} = 2,07.$$

Électrolyse ayant duré 1^h15^m.

A l'électrode (+)............................. O = 5,6
» (−)............................. H = 11,6

$$\frac{11,6}{2} - 5,6 = 0,2, \qquad \frac{H}{O} = \frac{11,6}{5,6} = 2,07.$$

Par cette modification apportée aux électrodes on est donc arrivé à abaisser le rapport $\frac{H}{O}$ de 2,32 à 2,07; mais cette dernière quantité ne peut être abaissée malgré toutes les précautions que l'on peut prendre, car nous avons démontré qu'il se formait toujours un produit peroxydé au pôle positif.

Dans un tube en U, dont les deux branches étaient séparées par un tampon d'amiante pour éviter autant que possible le mélange du liquide, on a effectué l'électrolyse de la dissolution de potasse. Après avoir prolongé l'électrolyse pendant dix-sept heures, on a pu, dans la branche où trempait l'électrode positive, avoir la réaction bleue par l'acide chromique.

On ne peut donc pas, en variant la force électromotrice, éviter, dans l'électrolyse d'une dissolution de potasse, cette action secondaire qui tend à abaisser le volume de l'oxygène libre.

2° Électrode soluble.

Dans ces expériences, on s'est servi du dispositif représenté dans la *fig.* 1.

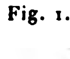
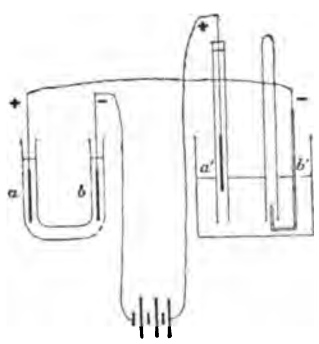


Fig. 1.



Le premier vase à électrolyte est un tube en U contenant dans une des branches une lame de cuivre a tarée d'avance et reliée à un fil de platine b' soudé et rasé à l'extrémité d'un tube de verre; ce fil de platine, contenu dans un autre vase à électrolyte, est surmonté d'un tube-éprouvette pour recueillir et mesurer les gaz formés. Dans la seconde branche du tube en U, une lame de platine b reliée au pôle négatif de la pile; enfin, dans l'autre vase à électrolyte, une lame de cuivre a' de surface égale à celle de la lame a, reliée au pôle (+) de la pile, et prise dans une éprouvette devant servir à recueillir les gaz.

La première lame de cuivre a était pesée après chaque expérience pour connaître la quantité de cuivre dissoute; la seconde a' soudée au tube ne pouvait pas être pesée, celui-ci devant servir à recueillir les gaz dégagés au pôle (+).

Lorsque l'on soumet dans ces circonstances une dissolution de potasse à l'électrolyse, le phénomène présente une succession de phases curieuses.

Prenons pour type d'expérience le cas d'une dissolution formée de poids égaux de potasse et d'eau parcourue par un courant d'environ $\frac{6}{100}$ d'ampère.

Dès que le circuit est fermé, l'hydrogène se dégage seul; les lames de cuivre commencent à noircir à l'extrémité en même temps que la liqueur bleue cupropotassique tombe au fond du voltamètre; l'enduit noir d'oxyde se propage de proche en proche sur toute la lame.

Au moment où la totalité de la lame de cuivre est complètement recou-

verte d'enduit noir, naissent instantanément des bulles gazeuses qui tapissent la surface d'une gaine donnant à l'œil l'impression d'un duvet. Le dégagement gazeux commence alors à s'effectuer régulièrement sur la lame.

A cet instant la force contre-électromotrice de l'électrolyte s'accroît brusquement d'environ la moitié de sa valeur. Peu à peu l'enduit noir se dissout pour donner la liqueur bleue cupropotassique, de sorte que bientôt la lame est complètement décapée. A partir de ce moment la lame de cuivre joue le rôle d'électrode insoluble, c'est-à-dire se comporte comme la lame de platine au pôle positif, dans le cas de deux lames insolubles.

Dans une expérience entreprise pour démontrer ce fait, on a placé les éprouvettes sur les lames électrodes lorsque l'oxygène se dégageait déjà depuis un certain temps sur la lame de cuivre bien décapée; après une électrolyse ayant duré $1^h 30^m$, on a mesuré les gaz.

Hydrogène....................................	$17^{cc},5$
Oxygène..	$8^{cc},6$

$$\frac{H}{O} = \frac{17,5}{8,6} = 2,04.$$

Nous retrouvons le rapport de l'hydrogène et de l'oxygène observé déjà dans le cas de deux lames de platine employées comme électrodes dans l'électrolyse des dissolutions de potasse.

Voici les nombres correspondant au type d'expériences que nous venons de décrire; les mesures physiques s'arrêtent tantôt au moment où l'oxygène apparaît, tantôt sont continuées pendant un certain temps.

Composition en poids..........	Potasse anhydre = 1000^{gr}
	Eau............ = 1383^{gr}
Densité de la liqueur..............................	1,44
Volume total..	1655^{cc}

Au commencement de l'expérience la force contre-électromotrice a été trouvée

$$e = -1,34.$$

Au moment où l'oxygène se dégage sur la lame positive, c'est-à-dire, dans ce cas, au bout de $17^m 30^s$, on remarque un relèvement considérable de cette force contre-électromotrice qui devient

$$e = -2,41.$$

our démontrer que la quantité d'oxygène absolue est employée à former l'oxyde de cuivre qui se dissout dans la liqueur potassique, la lame de vre était soigneusement pesée avant et après l'expérience.

Le $\frac{1}{2}$ volume d'hydrogène, ramené à 0° sous la pression de 760^{mm}, donne volume d'oxygène absorbé pour former l'oxyde de cuivre; le poids de ce olume d'oxygène doit correspondre, proportionnellement à l'équivalent de et élément, au poids perdu par la lame de cuivre :

Perte de poids de la lame de cuivre.............	$0^{gr},0490$
Hydrogène.....................................	$17^{cc},34$
Volume de l'oxygène absorbé...................	$8^{cc},67$
Poids de cet oxygène..........................	$0^{gr},0124$
correspondant à un poids de cuivre...........	$0^{gr},0488$

On voit qu'il n'y a, sur la perte de poids trouvée et la perte de poids théorique du cuivre pour former de l'oxyde, qu'une différence très petite et que, par conséquent, les actions secondaires, avant le départ de l'oxygène, se résument à la formation d'oxyde de cuivre qui se dissout pour former la liqueur cupropotassique.

Voici les résultats d'une autre série de mesures effectuées sur la liqueur précédente étendue de son volume d'eau :

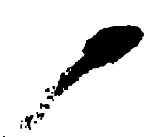
Composition de la liqueur	Potasse anhydre	$= 1000^{gr}$
	Eau............	$= 3037^{gr},8$
Volume total.................................		3309,7

Nous inscrirons dans le Tableau suivant la valeur des forces contre-électromotrices mesurées plusieurs fois avant le départ de l'oxygène :

Au moment de la fermeture du circuit.......		$e = -1,192$
	Après 2 minutes.......	$e = -1,727$
	» 10 »	$e = -1,744$
	» 16 »	$e = -1,710$
	» 23 »	$e = -1,705$
Départ de l'oxygène	» 31 »	$e = -2,565$

A part la première mesure, qui donne un nombre inférieur aux suivants ([1]), on voit que, au bout d'un temps très court, la constance de la

([1]) La force contre-électromotrice s'accroît rapidement pendant les premières secondes de la fermeture du circuit, pour devenir bientôt constante. Le nombre trouvé au moment de la fermeture dépend donc de l'instant précis auquel la lecture a été faite.



force contre-électromotrice s'établit jusqu'au moment du départ de l'oxygène sur la lame-cuivre où l'on remarque le relèvement rapide de cette force contre-électromotrice.

Quant aux autres données expérimentales établissant la formation d'oxyde de cuivre seul, elles sont très concordantes :

Perte de poids de la lame cuivre	$0^{gr},0284$
Volume de l'hydrogène	$10^{cc},23$
Poids de l'hydrogène	$0^{gr},0073$
correspondant à un poids de cuivre	$0^{gr},0287$

Une fois que l'oxygène a commencé à se dégager, la force contre-électromotrice se maintient ce qu'elle est devenue après le relèvement remarqué.

Ainsi, dans une expérience analogue à la précédente, et avec la même liqueur, on a trouvé :

Au moment de la fermeture du circuit		$e = -1,268$
	Après $0^h 11^m$	$e = -1,621$
	» 0.20	$e = -1,619$
	» 0.35	$e = -1,612$
Départ de l'oxygène	» 0.53	$e = -2,488$
	» 0.58	$e = -2,489$
	» 2.58	$e = -2,401$
	» 3.30	$e = -2,398$

Lorsque la lame est complètement décapée et que l'oxygène se dégage régulièrement à sa surface, si l'on vient à ouvrir le circuit, les bulles d'oxygène continuent à se détacher pendant quelques instants. Si l'on ferme de nouveau le circuit avant que tout le gaz ait quitté la lame, l'électrolyse continue comme auparavant, la force électromotrice de polarisation seule ayant pris pour quelques instants une valeur plus faible.

Mais, si l'on a tardé pendant quinze secondes environ à refermer le circuit, c'est-à-dire jusqu'au moment où la surface du cuivre paraît complètement dépourvue de bulles gazeuses, la lame se met à noircir de nouveau et le phénomène repasse par les phases que nous venons de décrire.

Il semble donc que l'insolubilité de l'électrode de cuivre soit liée à la présence de bulles gazeuses à la surface de cette électrode.

Si l'on fait varier les conditions de l'expérience, on constate que l'allure générale de l'électrolyse dépend de la *densité du courant, de l'intensité du courant* et du *degré de concentration de la liqueur potassique*.

1° Pour un même courant et une même liqueur, on a fait varier *la surface de la lame de cuivre*. On mettait, à cet effet, dans le même circuit d'une pile plusieurs voltamètres contenant chacun une lame de cuivre; la première de surface 1, la deuxième $\frac{1}{2}$, la troisième $\frac{1}{4}$. Le circuit fermé, ces lames ont noirci par la base, comme dans les expériences que nous venons de décrire; l'enduit a envahi la totalité des lames, et enfin l'oxygène s'est dégagé

Sur la lame de surface	$\frac{1}{4}$	au bout de	$6^m.18^s$
»	$\frac{1}{2}$	»	13. 2
»	1	»	25.22

On peut prévoir d'après ces nombres que, si les lames eussent été coupées avec précision aux dimensions données, on eût trouvé des temps sensiblement proportionnels aux surfaces de ces lames.

2° Pour une même liqueur et une même lame, le dégagement de l'oxygène a lieu d'autant plus vite et le poids de cuivre oxydé est d'autant moindre que *le courant est plus intense*, comme l'indique le Tableau suivant :

Intensité du courant.	Durée jusqu'au départ de l'oxygène.	Hydrogène dégagé avant le départ de l'oxygène.
	h m s	cc
23	1.10.45	16,6
41	0.12. 0	5,8
60	0. 6.30	3,9
65	0. 1.15	1,0
72	0. 0.45	»
73	0. 0.35	»
291	(temps inappréciable)	»

On voit que, pour les courants forts, la première phase de l'expérience se réduit à un temps très court; pour des courants faibles, c'est la deuxième phase qui tend à disparaître.

Ainsi, quand on emploie une pile de 2 éléments Daniell, l'électrolyse commence et la force électromotrice de polarisation prend bientôt une valeur de $1^{volt},6$; ce n'est qu'au bout de sept heures que la lame est complètement noircie.

A ce moment il se forme des bulles d'oxygène à la surface, mais la force électromotrice de polarisation s'élevant alors brusquement à la valeur de $2^{volts},2$ fait équilibre à la force électromotrice de la pile et il ne s'échappe aucun gaz de l'électrode positive; l'électrolyse se maintient indéfiniment

force contre-électromotrice s'établit jusqu'au mom
gène sur la lame-cuivre où l'on remarque le rel
force contre-électromotrice.

Quant aux autres données expérimentales
d'oxyde de cuivre seul, elles sont très concordant

Perte de poids de la lame cuivre ....
Volume de l'hydrogène ....
Poids de l'hydrogène ....
correspondant à un poids de cuivre . .

Une fois que l'oxygène a commencé à se d
motrice se maintient ce qu'elle est devenue
Ainsi, dans une expérience analogue à l
liqueur, on a trouvé :

Au moment de la fermeture du cir		
	Après	$0^h 11^m$.
	»	0.20 . .
	»	0.35 .
Départ de l'oxygène	»	0.53 .
	»	0.58
	»	2.58
	»	3.3

Lorsque la lame est complètement
régulièrement à sa surface, si l'on vi
gène continuent à se détacher pend
nouveau le circuit avant que tout l
tinue comme auparavant, la for
ayant pris pour quelques instants
Mais, si l'on a tardé pendant q
cuit, c'est-à-dire jusqu'au mom
ment dépourvue de bulles gazeu
le phénomène repasse par les pl
Il semble donc que l'insolul
présence de bulles gazeuses à
Si l'on fait varier les condi
générale de l'électrolyse dé
du courant et du *degré de*

tamment dans
tions; elles pré-
oids d'eau sextuple

SUR LES

FORMES BILINÉAIRES,

PAR M. E. COSSERAT.

MM. Jordan (¹) et Kronecker ont considéré, en se bornant à l'étude du cas le plus général, le problème suivant :

Étant donné un polynôme bilinéaire

$$P = \sum a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n, \ \beta = 1, 2, \ldots, n),$$

le ramener à une forme canonique simple par des substitutions orthogonales opérées, les unes sur les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les autres sur les variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

M. Sylvester (²) a repris tout récemment l'étude de la même question.

Nous nous proposons actuellement d'établir quelques-unes des propositions que nous n'avons fait qu'indiquer dans un travail antérieur publié au tome III de ce Recueil.

Rappelons tout d'abord le résultat obtenu par M. Jordan.

Considérons l'équation

$$D = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \ldots & a_{11} & a_{12} & \ldots \\ 0 & -\lambda & 0 & \ldots & a_{21} & a_{22} & \ldots \\ . & \ldots & . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{11} & a_{21} & . & \ldots & -\lambda & 0 & \ldots \\ a_{12} & a_{22} & . & \ldots & 0 & -\lambda & \ldots \\ \ldots & \ldots & . & \ldots & . & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0,$$

(¹) C. JORDAN, *Mémoire sur les formes bilinéaires* (*Journal de Liouville*, 2ᵉ série, t. XIX, p. 35-54).

(²) SYLVESTER, *Sur la réduction biorthogonale d'une forme linéo-linéaire à sa forme canonique* (*Comptes rendus*, t. CVIII, p. 651).

qui ne contient que des puissances paires de λ et dont les coefficients restent invariables, quelque substitution orthogonale que l'on opère sur les x ou sur les y. Supposons que toutes les racines soient distinctes et désignons-les par

$$\lambda_1, \quad -\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad -\lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n, \quad -\lambda_n.$$

Les équations suivantes

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1, \tag{1}$$

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = 1; \tag{1'}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1n} y_n = \lambda_\rho x_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \ldots + a_{nn} y_n = \lambda_\rho x_n; \end{array}\right. \tag{2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \ldots + a_{n1} x_n = \lambda_\rho y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n = \lambda_\rho y_n. \end{array}\right. \tag{2'}$$

résolues par rapport aux x et aux y, donnent pour les valeurs correspondantes de $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ (le signe étant choisi à volonté)

$$x_1 = \pm c_{1\rho} \ldots x_n = \pm c_{n\rho}, \qquad y_1 = \pm d_{1\rho} \ldots y_n = \pm d_{n\rho}.$$

Si l'on considère la substitution

$$\xi_\rho = c_{1\rho} x_1 + c_{2\rho} x_2 + \ldots + c_{n\rho} x_n, \qquad \eta_\rho = d_{1\rho} y_1 + \ldots + d_{n\rho} y_n,$$

on opère la réduction à la forme canonique

$$P = \lambda_1 \xi_1 \eta_1 + \ldots + \lambda_n \xi_n \eta_n.$$

Le résultat de M. Jordan peut être présenté sous une forme qui en rend la démonstration presque intuitive et qui facilite l'étude du cas où l'équation $D = 0$ a des racines multiples.

Remplaçons dans les équations (2) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ par leurs valeurs tirées des équations (2)', il vient

$$a_{11}(a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \ldots + a_{n1} x_n) + a_{12}(a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{n2} x_n) + \ldots = \lambda_\rho^2 x_1,$$

$$a_{21}(a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \lambda_\rho^2 x_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$



Considérons la forme quadratique

$$\sum\left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2 = (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n)^2 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n)^2 + \ldots$$

et proposons-nous de la réduire à une somme de carrés par le moyen d'une substitution orthogonale. L'équation en s relative à cette forme s'obtiendra manifestement en remplaçant λ^2 par s dans l'équation $D = 0$, et la substitution sera

$$\xi_\rho = c_{1\rho}x_1 + c_{2\rho}x_2 + \ldots + c_{n\rho}x_n;$$

de plus, si la forme canonique du polynôme bilinéaire P est

$$\lambda_1\xi_1\eta_1 + \ldots + \lambda_n\xi_n\eta_n,$$

la forme $\sum\left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2$ deviendra

$$\lambda_1^2\xi_1^2 + \ldots + \lambda_n^2\xi_n^2.$$

De même, si l'on considère la forme quadratique $\sum\left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)^2$, elle deviendra

$$\lambda_1^2\eta_1^2 + \ldots + \lambda_n^2\eta_n^2;$$

par la substitution,

$$\eta_\rho = d_{1\rho}y_1 + \ldots + d_{n\rho}y_n.$$

Le résultat de M. Jordan peut donc s'énoncer de la façon suivante :

Le problème de la réduction de la forme bilinéaire $P = \sum a_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta$ *à la forme canonique* $\lambda_1\xi_1\eta_1 + \ldots + \lambda_n\xi_n\eta_n$ *par des substitutions orthogonales opérées, les unes sur les variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *les autres sur les variables* $y_1, \ldots, y_n$, *est identique au suivant :*

Déterminer deux substitutions orthogonales qui, appliquées respectivement aux deux formes $\sum\left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2$ *et* $\sum\left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)^2$, *les réduisent à des sommes de carrés.*

Sous cette forme, le résultat peut être établi immédiatement.

En effet, nous nous proposons de déterminer deux substitutions orthogonales

$$\xi_\rho = c_{1\rho}x_1 + \ldots + c_{n\rho}x_n, \qquad \eta_\rho = d_{1\rho}y_1 + \ldots + d_{n\rho}y_n \tag{3}$$

[illegible]

$$\lambda_1 \xi_1 \eta_1 + \ldots + \lambda_n \xi_n \eta_n.$$

[illegible] $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial \eta_i}\right)^2$, on aura identiquement

$$\sum \left(\frac{\partial P}{\partial \eta_i}\right)^2 = \lambda_1^2 \xi_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 \xi_n^2,$$

[illegible] cela résulte de ce que la forme du paramètre [illegible] d'une fonction n'est pas altérée par une sub- [illegible] sur les variables.

[illegible] $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial \eta_i}\right)^2$ ne dépend que de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nous [illegible] la substitution $\xi_\rho = c_{1\rho} x_1 + \ldots + c_{n\rho} x_n$ est la [illegible] réduit la forme quadratique $\sum\left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2$ à une [illegible] conclusion semblable en considérant [illegible] en s relatives aux deux formes $\sum\left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2$ [illegible]

[illegible] $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial \eta_i}\right)^2$ et $\sum\left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)^2$ sont réduites res- [illegible] $+ \ldots + \lambda_n^2 \eta_n^2$, la forme bilinéaire P [illegible]

[illegible] bilinéaires particulièrement re- [illegible] où l'on a, pour toutes les valeurs [illegible]

$$[illegible] = -a_{ji}.$$

[illegible] la forme

[illegible]

[illegible]

et l'on a l'identité suivante :

$$\begin{vmatrix} A_{11}-x^2 & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}-x^2 & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nn}-x^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-x \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}+x & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix}.$$

Le second membre de cette identité est le carré d'un polynôme entier en x. Or, si dans le premier membre on remplace x^2 par $-\lambda^2$ et si l'on égale à zéro le résultat, on a l'équation $D = 0$ considérée au début. Donc, dans le cas particulier que nous considérons, le premier membre de cette équation est un carré parfait, et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Le premier membre de l'équation en s relative à la forme bilinéaire $\frac{1}{2}\sum a_{ik}p_{ik}$, *considérée comme forme quadratique des* $2n$ *variables* $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, *est un carré parfait. Cette équation ne contient que des puissances paires de la variable, et l'équation transformée en* $-s^2$ *est l'équation en s relative à la forme quadratique* $\sum\left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2$ *des n variables* $x_1, \dots, x_n$.

Les formes quadratiques $\sum\left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)^2$ et $\sum\left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2$ deviennent identiques si l'on remplace x_i et y_i par une même lettre z_i. Le problème proposé revient donc à la réduction d'une seule forme quadratique à une somme de carrés par le moyen d'une substitution orthogonale.

De plus, on conçoit la possibilité d'opérer sur les x et sur les y la même substitution, en sorte que le polynôme bilinéaire $\frac{1}{2}\sum a_{ik}p_{ik}$ *conserve la même forme et devienne* $\frac{1}{2}\sum \mathcal{A}_{ik}\varphi_{ik}$.

Plaçons-nous à ce dernier point de vue et, afin d'étudier de plus près la question, cherchons à lui appliquer les principes utilisés par M. Jordan dans le cas général.

Nous nous bornerons à considérer le cas où $n = 5$; le cas où $n = 4$ sera

également traité; car, si n est impair, l'équation en s relative à la forme quadratique $\sum\left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2$ admet la racine simple $s=0$; on peut, par suite, ramener immédiatement ce cas à celui où n est pair. Les résultats que nous obtiendrons pourront facilement se généraliser. Ajoutons que, dans le cas que nous considérons, où $n=5$, ils ont une interprétation géométrique intéressante dans la théorie des systèmes linéaires de cercles, qui, inversement, permet de les établir géométriquement.

Soit donc

$$P=\sum a_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta \qquad (\alpha=1,2,3,4,5,\quad \beta=1,2,3,4,5),$$

avec

$$a_{\alpha\alpha}=0, \qquad a_{\alpha\beta}=-a_{\beta\alpha}.$$

La réduction de P à une forme plus simple dépend de la solution du problème suivant :

Trouver les maxima et minima de P, *lorsque les variables x et y restent assujetties aux relations*

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=1, \qquad y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2+y_5^2=1.$$

Les valeurs des variables correspondant au maximum (ou au minimum) sont données par le système

$$(1)\quad x_1^2+x_2^2+\ldots+x_5^2=1, \qquad (1)'\quad y_1^2+y_2^2+\ldots+y_5^2=1,$$

$$(2)\left\{\begin{array}{l} \phantom{a_{21}y_1+{}} a_{12}y_2+a_{13}y_3+a_{14}y_4+a_{15}y_5=\lambda x_1,\\ a_{21}y_1 \phantom{+a_{12}y_2} +a_{23}y_3+a_{24}y_4+a_{25}y_5=\lambda x_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{51}y_1+a_{52}y_2+a_{53}y_3+a_{54}y_4 \phantom{+a_{55}y_5} =\lambda x_5, \end{array}\right. \qquad (2)'\left\{\begin{array}{l} \phantom{a_{21}x_1+{}} a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4+a_{15}x_5=-\lambda y_1,\\ a_{21}x_1 \phantom{+a_{12}x_2} +a_{23}x_3+a_{24}x_4+a_{25}x_5=-\lambda y_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_{51}x_1+a_{52}x_2+a_{53}x_3+a_{54}x_4 \phantom{+a_{55}x_5} =-\lambda y_5. \end{array}\right.$$

Le maximum est égal à λ, inconnue déterminée par l'équation

$$D=\left|\begin{array}{cccccccc} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{12} & \ldots\\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & a_{21} & 0 & \ldots\\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & \ldots & . & \ldots\\ . & . & . & . & . & \ldots & . & \ldots\\ . & . & . & . & \lambda & \ldots & . & \ldots\\ 0 & a_{21} & . & . & . & \lambda & 0 & \ldots\\ a_{12} & 0 & . & . & . & 0 & \lambda & \ldots\\ \ldots & . & . & . & . & . & . & \ldots \end{array}\right|=0.$$

L'équation $D=0$ a ses coefficients invariables pour toute substitution

orthogonale effectuée sur l'une ou l'autre des deux séries de lettres x_1, $x_2, \ldots, x_5$ et $y_1, y_2, \ldots, y_5$. Elle est identique à l'équation en s relative à la forme bilinéaire considérée comme forme quadratique des dix variables x_1, $x_5, y_1, \ldots, y_5$.

Soient α, β, γ, δ, ε les cinq premiers nombres écrits dans l'ordre de permutation naturelle 1, 2, 3, 4, 5 à partir de l'un d'eux que nous appellerons α, et posons

$$\Omega_\alpha(a) = a_{\beta\gamma}a_{\delta\varepsilon} + a_{\beta\delta}a_{\varepsilon\gamma} + a_{\beta\varepsilon}a_{\gamma\delta},$$

$$\mathrm{I} = \sum_{ij} a_{ij}^2, \qquad \mathrm{J} = \sum_{\alpha} (a_{\beta\gamma}a_{\delta\varepsilon} + a_{\beta\delta}a_{\varepsilon\gamma} + a_{\beta\varepsilon}a_{\gamma\delta})^2.$$

L'équation $\mathrm{D} = 0$ s'écrit

$$\mathrm{D} = \lambda^2(\lambda^4 - \mathrm{I}\lambda^2 + \mathrm{J})^2 = 0.$$

Soit λ_1 une racine de l'équation $\lambda^4 - \mathrm{I}\lambda^2 + \mathrm{J} = 0$. Les équations (2) et (2)′ feront connaître en général les rapports des quantités correspondantes $x_1, \ldots, x_5, y_1, \ldots, y_5$. On achèvera de les déterminer, au signe près, en employant l'une ou l'autre des équations (1), (1)′. [On remarquera que l'on a

$$x_1^2 + \ldots + x_5^2 = y_1^2 + \ldots + y_5^2$$

en vertu de (2), (2)′].

Considérons donc un système de solutions

$$x_1 = \alpha_{11}, \quad x_2 = \alpha_{21}, \quad \ldots, \quad x_5 = \alpha_{51}, \quad y_1 = \alpha_{12}, \quad y_2 = \alpha_{22}, \quad \ldots, \quad y_5 = \alpha_{52}.$$

A la racine $-\lambda_1$, de $\mathrm{D} = 0$, correspond manifestement le système de solutions suivant :

$$x_1 = \alpha_{12}, \quad x_2 = \alpha_{22}, \quad \ldots, \quad x_5 = \alpha_{52}, \quad y_1 = \alpha_{11}, \quad y_2 = \alpha_{21}, \quad \ldots, \quad y_5 = \alpha_{51}.$$

On a

$$\begin{aligned}
&\phantom{a_{21}\alpha_{12}+{}} a_{21}\alpha_{22} + a_{13}\alpha_{32} + a_{14}\alpha_{42} + a_{15}\alpha_{52} = \lambda_1\alpha_{11},\\
&a_{21}\alpha_{12} \phantom{{}+a_{21}\alpha_{22}} + a_{23}\alpha_{32} + a_{24}\alpha_{42} + a_{25}\alpha_{52} = \lambda_1\alpha_{21},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&a_{51}\alpha_{12} + a_{52}\alpha_{22} + a_{53}\alpha_{32} + a_{54}\alpha_{42} + \phantom{a_{55}\alpha_{52}} = \lambda_1\alpha_{51}.
\end{aligned}$$

Multiplions les deux membres de ces relations respectivement par $\alpha_{12}, \ldots, \alpha_{52}$, et ajoutons; il vient

$$\lambda_1(\alpha_{11}\alpha_{12} + \ldots) = 0,$$

c'est-à-dire, puisque λ_1 n'est pas nul,

$$\alpha_{11}\alpha_{12} + \ldots = 0.$$

Cela posé, $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{51}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{52}$ satisfaisant aux équations (1), (1)', on sait que l'on pourra déterminer deux substitutions orthogonales de la forme

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \alpha_{31}x_3 + \alpha_{41}x_4 + \alpha_{51}x_5,\\
\xi_2 &= \alpha_{12}x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_{52}x_5,\\
\xi_3 &= A_{13}x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{53}x_5,\\
\xi_4 &= A_{14}x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{54}x_5,\\
\xi_5 &= A_{15}x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{55}x_5,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{21}y_2 + \alpha_{31}y_3 + \alpha_{41}y_4 + \alpha_{51}y_5,\\
\eta_2 &= \alpha_{12}y_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_{52}y_5,\\
\eta_3 &= A_{13}y_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{53}y_5,\\
\eta_4 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\eta_5 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$A_{13}, \ldots, A_{55}$ étant des coefficients convenablement choisis.

Substituant dans l'expression des nouvelles variables les valeurs

$$x_1 = \alpha_{11}, \quad \ldots, \quad x_5 = \alpha_{51}, \quad y_1 = \alpha_{12}, \quad y = \alpha_{22}, \quad \ldots, \quad y_5 = \alpha_{52},$$

on voit que P sera maximum pour

$$\xi_1 = \eta_2 = 1, \qquad \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = \eta_1 = \eta_3 = \eta_4 = \eta_5 = 0.$$

Or, soit $\Sigma \mathcal{A}_{\alpha\beta}\xi_\alpha\eta_\beta$ ce que devient P rapporté à ces nouvelles variables; on aura, pour déterminer les valeurs de ces variables correspondant au maximum, les relations

$$\begin{aligned}
\xi_1^2 + \ldots + \xi_5^2 &= 1, & \eta_1^2 + \ldots + \eta_5^2 &= 1,\\
\mathcal{A}_{12}\eta_2 + \ldots &= \lambda_1\xi_1, & \mathcal{A}_{21}\xi_2 + \ldots &= \lambda_1\eta_1,\\
\ldots\ldots\ldots&, & \ldots\ldots\ldots&,\\
\mathcal{A}_{51}\eta_1 + \ldots &= \lambda_1\xi_5, & A_{15}\xi_1 + \ldots &= \lambda_1\eta_5,
\end{aligned}$$

analogues à (1), (1)', (2), (2)'. Et, pour qu'elles soient satisfaites pour $\xi_1 = \eta_2 = 1$ et $\xi_2 = \xi_3 = \ldots = \eta_5 = 0$, il faudra que l'on ait

$$\mathcal{A}_{12} = \lambda_1, \qquad \mathcal{A}_{13} = \mathcal{A}_{14} = \mathcal{A}_{15} = 0:$$

donc P se réduira à la forme

$$\lambda_1(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1) + P_1,$$

P_1 étant indépendant de $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ et de même forme que P.

Opérant sur P_1 comme sur P, on pourra le mettre sous la forme

$$\lambda_2(\xi_3\eta_4 - \eta_3\xi_4) + P_2;$$

P_2, ne dépendant pas de $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$, est nul; donc on est parvenu à mettre P sous la forme canonique

$$P = \lambda_1(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1) + \lambda_2(\xi_3\eta_4 - \eta_3\xi_4).$$

Les coefficients de l'équation $D = 0$ sont invariables pour toute substitution orthogonale effectuée sur l'une ou l'autre des deux séries de lettres $x_1, \ldots, x_5, y_1, \ldots, y_5$. Or cette équation devient

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & . & . & . & -\lambda_1 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & \ldots & . & . & . & . \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$[\lambda(\lambda^2 - \lambda_1^2)(\lambda^2 - \lambda_2^2)]^2 = 0.$$

On peut donc calculer *a priori* les coefficients de la forme canonique en résolvant l'équation caractéristique $D = 0$.

On peut également, lorsque l'équation $\sqrt{D} = 0$ a ses racines inégales, calculer *a priori* les coefficients d'une des substitutions

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{ll} \xi_1 = C_{11}x_1 + \ldots + C_{51}x_5, & \eta_1 = C_{11}y_1 + \ldots + C_{51}y_5, \\ \xi_2 = C_{12}x_1 + \ldots + C_{52}x_5, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \xi_5 = C_{15}x_1 + \ldots + C_{55}x_5, & \end{array}\right.$$

que l'on doit employer pour opérer la réduction à la forme canonique.

Considérons la racine λ_1. On aura, pour déterminer les valeurs correspondantes de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_5, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_5$ qui donnent le maximum, les relations

$$\begin{array}{rr} \lambda_1\eta_2 = \lambda_1\xi_1, & \lambda_1\xi_2 = -\lambda_1\eta_1, \\ -\lambda_1\eta_1 = \lambda_1\xi_2, & -\lambda_1\xi_1 = -\lambda_1\eta_2, \\ \lambda_2\eta_4 = \lambda_1\xi_3, & \lambda_2\xi_4 = -\lambda_1\eta_3, \\ -\lambda_2\eta_3 = \lambda_1\xi_4, & -\lambda_2\xi_3 = -\lambda_1\eta_4, \\ 0 = \lambda_1\xi_5, & 0 = -\lambda_1\eta_5, \end{array}$$

c'est-à-dire

$$\eta_2 = \xi_1, \qquad \xi_1^2 + \xi_2^2 = 1,$$
$$\eta_1 = -\xi_2, \qquad \eta_1^2 + \eta_2^2 = 1,$$
$$\xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = \eta_3 = \eta_4 = \eta_5 = 0.$$

Les équations (3), résolues par rapport aux x et aux y, donneront les valeurs correspondantes de $x_1, \ldots, x_5, y_1, \ldots, y_5$, à savoir :

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} x_1 = C_{11}\xi_1 + C_{12}\xi_2, & y_1 = -C_{11}\xi_2 + C_{12}\xi_1, \\ x_2 = C_{21}\xi_1 + C_{22}\xi_2, & y_2 = -C_{21}\xi_2 + C_{22}\xi_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_5 = C_{51}\xi_1 + C_{52}\xi_2, & y_5 = -C_{51}\xi_2 + C_{52}\xi_1, \end{array} \right.$$

avec

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1.$$

Or revenons aux équations (1), (1)′, (2), (2)′. Si les équations linéaires (2), (2)′ admettent comme système de solutions

$$x_1 = \alpha_{11}, \quad \ldots, \quad x_5 = \alpha_{51}, \quad y_1 = \alpha_{12}, \quad y_2 = \alpha_{22}, \quad \ldots, \quad y_5 = \alpha_{52}.$$

elles admettent aussi

$$x_1 = \alpha_{12}, \quad \ldots, \quad x_5 = \alpha_{52}, \quad y_1 = -\alpha_{11}, \quad \ldots, \quad y_5 = -\alpha_{51}$$

et, par suite,

$$x_1 = \lambda\alpha_{11} + \mu\alpha_{12}, \quad \ldots, \quad x_5 = \lambda\alpha_{51} + \mu\alpha_{52}, \quad y_1 = \lambda\alpha_{12} - \mu\alpha_{11}, \quad \ldots.$$

Donc le système des équations (1), (1)′, (2), (2)′ admet

$$(5) \qquad x_1 = \xi_1\alpha_{11} + \xi_2\alpha_{12}, \quad \ldots, \quad y_1 = -\xi_2\alpha_{11} + \xi_1\alpha_{12}, \quad \ldots$$

en supposant la relation

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1.$$

On voit que, si l'on a *un* système de solutions de (2), (2)′

$$\alpha_{11}, \quad \ldots, \quad \alpha_{51}, \quad \alpha_{12}, \quad \ldots, \quad \alpha_{52},$$

on a la *solution générale* des (1) par ces dernières formules (5); cela résulte de la considération des formules (4), qui donnent la solution générale.

La comparaison des formules (4) et (5) montre de plus qu'on a, pour $C_{11}, \ldots$, le système le plus général de solutions par

$$C_{11} = \zeta_1 \alpha_{11} + \zeta_2 \alpha_{12}, \quad \ldots, \quad C_{12} = -\zeta_2 \alpha_{11} + \zeta_1 \alpha_{12}, \quad \ldots$$

avec

$$\zeta_1^2 + \zeta_2^2 = 1.$$

Répétant le raisonnement pour λ_2, on aura de même la forme générale des $C_{12}, \ldots, C_{51}$.

Arrivons à $C_{15}, C_{25}, C_{35}, C_{45}, C_{55}$.

Les équations (1) sont vérifiées par

$$x_1 = \alpha_{11}, \quad \ldots, \quad x_5 = \alpha_{51}$$

et

$$y_1 = \alpha_{12}, \quad \ldots, \quad y_5 = \alpha_{52}.$$

Le déterminant des coefficients des y étant nul, on obtient, en multipliant par les mineurs du premier ordre, ou par $\Omega_1, \ldots, \Omega_5$,

$$\begin{aligned} &\Omega_1 \alpha_{11} + \Omega_2 \alpha_{21} + \ldots + \Omega_5 \alpha_{51} = 0, \\ &\Omega_1 \alpha_{12} \qquad\qquad + \ldots + \Omega_5 \alpha_{52} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} &\Omega_1 C_{11} + \ldots + \Omega_5 C_{51} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Par suite,

$$C_{15} = \frac{1}{\sqrt{J}} \Omega_1, \quad C_{25} = \frac{1}{\sqrt{J}} \Omega_2, \quad \ldots, \quad C_{55} = \frac{1}{\sqrt{J}} \Omega_5.$$

Ces dernières formules peuvent être écrites immédiatement : si l'on se reporte à la forme quadratique $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2$, ces coefficients correspondent à la racine $s = 0$ de l'équation en s.

Remarquons que, si l'on effectue une substitution orthogonale, telle que l'on ait

$$\xi_5 = C_{15} x_1 + \ldots + C_{55} x_5, \quad \eta_5 = C_{15} y_1 + \ldots + C_{55} y_5,$$

la forme bilinéaire devient

$$\tfrac{1}{2} \Sigma \mathfrak{b}_{ik} \varphi_{ik}$$

et l'on a

$$\mathfrak{b}_{15} = \mathfrak{b}_{25} = \mathfrak{b}_{35} = \mathfrak{b}_{45} = 0.$$

Remarquons enfin que, dans le cas où $J = 0$, le problème est impossible. Le problème général de M. Jordan est lui-même impossible dans ce cas. On ne peut pas réduire la forme quadratique $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2$ à une somme de carrés par l'emploi d'une substitution orthogonale; car, si l'on considère la racine $s = 0$ de l'équation en s, les coefficients de la substitution qui lui correspondent sont proportionnels à $\Omega_1, \ldots, \Omega_5$, et l'on a par hypothèse $\Sigma \Omega_i^2 = 0$.

Il reste, pour compléter ce qui précède, à indiquer le mode de formation des équations en λ pour les différentes valeurs de n. Le premier membre de l'une quelconque de ces équations est un carré parfait; dans l'équation obtenue en annulant la racine carrée, on posera $\lambda = is$; les coefficients de l'équation obtenue s'expriment élégamment, ainsi qu'il est aisé de le voir, à l'aide des déterminants gauches symétriques de M. Cayley.

SUR

LES SYSTÈMES DE COURBES

QUI DIVISENT HOMOGRAPHIQUEMENT

LES GÉNÉRATRICES D'UNE SURFACE RÉGLÉE;

PAR M. CH. BIOCHE.

INTRODUCTION.

On sait que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de courbes divise homographiquement les génératrices d'une surface réglée est que ce système vérifie une équation de Riccati, comme cela a lieu, par exemple, pour les lignes asymptotiques des surfaces gauches. Si l'on détermine un point sur la surface considérée : 1° par la longueur r du segment compté sur la génératrice qui passe par ce point, à partir d'une courbe *directrice;* 2° par l'arc s de cette courbe qui a pour extrémité le point où elle est rencontrée par la génératrice en question, une équation de Riccati comme celles dont il s'agit peut s'écrire

$$\frac{dr}{ds} = Ar^2 + Br + C,$$

A, B, C étant des fonctions quelconques de s. Si $A = 0$, la division des génératrices se fait en segments proportionnels; si $A = 0$, $B = 0$, les segments sont égaux. Si $A \neq 0$, les segments n'étant ni égaux ni proportionnels, je dirai que la division est du *type général*.

Les fonctions A, B, C étant quelconques, on peut former une infinité de systèmes qui divisent homographiquement les génératrices; pour abréger, j'appellerai de pareils systèmes de courbes *systèmes homographiques*. Par suite, on peut se proposer de déterminer et d'étudier ceux des systèmes de cette nature qui sont assujettis à des conditions particulières; c'est ce qui

fait le sujet de ce Mémoire. Les surfaces gauches offrent, comme on le verra, un champ d'études bien plus important que les surfaces développables, quoique celles-ci présentent parfois quelque intérêt.

Voici maintenant quelques indications sur le contenu de ce Mémoire :

Dans la première Partie, je résume les formules et théorèmes généraux utiles pour l'étude que je me propose. Je puis ainsi préciser les notations dont je me sers et abréger les démonstrations qui figurent dans les Parties suivantes, en supprimant dans ces démonstrations les détails qui ne se rapportent pas uniquement aux théorèmes à démontrer. Il est difficile d'affirmer la nouveauté de certains résultats; mais, sauf ceux qui sont absolument classiques et pour lesquels, d'ailleurs, j'ai presque toujours cité des noms d'auteurs, je n'ai trouvé nulle part une partie de ceux que je donne, et je crois que quelques-unes des formules de ce Mémoire sont d'une utilité très générale pour la théorie des surfaces réglées, en particulier pour l'étude des surfaces passant par une courbe donnée ou pour celle de la déformation des surfaces.

Les théorèmes contenus dans les deuxième, troisième et quatrième Parties sont pour la plupart énoncés dans une Note que M. Darboux a bien voulu faire insérer au *Bulletin des Sciences mathématiques* (décembre 1888). Il n'est donc guère nécessaire de les résumer de nouveau.

Je me sers constamment, pour définir les courbes à étudier, de coordonnées *à la surface;* de cette façon j'ai facilement des propriétés géométriques des courbes et des surfaces sur lesquelles elles sont tracées, sans faire intervenir des éléments étrangers comme des systèmes d'axes n'ayant pas de relation nécessaire avec la figure à étudier. D'ailleurs, un grand nombre des propriétés que j'étudie subsistent lorsqu'on déforme les surfaces, ce qui n'altère pas les coordonnées dont je me sers, tandis que ces propriétés ne subsisteraient pas dans une transformation homographique qui altérerait les angles et les longueurs.

PREMIÈRE PARTIE.

REPRÉSENTATION ANALYTIQUE D'UNE SURFACE RÉGLÉE.

1. Une surface réglée peut être définie comme engendrée par une droite qui s'appuie sur une *directrice* et se meut d'après une loi déterminée. Soient x, y, z les coordonnées d'un point de la directrice, a, b, c les cosinus des angles que la génératrice fait avec les trois axes des coordonnées, que je suppose rectangulaires, les équations d'une génératrice peuvent s'écrire

$$\frac{X-x}{a} = \frac{Y-y}{b} = \frac{Z-z}{c} = r,$$

X, Y, Z étant les coordonnées constantes et r un paramètre variable. Si x, y, z, a, b, c sont fonctions d'une variable indépendante, par exemple de l'arc s de la *directrice*, lorsque cette variable prend toutes les valeurs possibles, la droite engendre une surface, et toute relation entre r et s définit une courbe sur cette surface.

Lorsque la directrice est une courbe, pour définir la position de la génératrice, indépendamment des axes de coordonnées dont j'ai parlé, et qui n'ont en général aucune relation essentielle avec la surface, je rapporterai la génératrice au trièdre formé par la tangente, la normale principale et la binormale. J'appelle λ, μ, ν les cosinus directeurs de la génératrice par rapport aux arêtes de ce trièdre, les directions de ces arêtes étant définies par rapport aux axes primitifs par les cosinus que donne le Tableau suivant :

	OX.	OY.	OZ.
Tangente......................	α	β	γ
Normale......................	α'	β'	γ'
Binormale....................	α''	β''	γ''

Les cosinus a, b, c sont alors donnés par les équations

$$a = \lambda\alpha + \mu\alpha' + \nu\alpha'', \qquad b = \lambda\beta + \mu\beta' + \nu\beta'', \qquad c = \lambda\gamma + \mu\gamma' + \nu\gamma''.$$

On a en outre, entre les différents groupes de cosinus, les relations bien connues qui existent entre les cosinus de trois directions rectangulaires.

2. Si l'on appelle ω et π les courbures de la directrice, les dérivées des cosinus a, b, c, prises par rapport à l'axe, sont données par des expressions telles que

$$\frac{da}{ds} = \left(\frac{d\lambda}{ds} - \mu\omega\right)\alpha + \left(\lambda\omega + \nu\pi + \frac{d\mu}{ds}\right)\alpha' + \left(\frac{d\nu}{ds} - \mu\pi\right)\alpha'',$$

lorsqu'on tient compte des formules classiques de M. Frenet. Je poserai, pour abréger,

$$\frac{d\lambda}{ds} - \mu\omega = \mathrm{L}, \qquad \frac{d\mu}{ds} + \lambda\omega + \nu\pi = \mathrm{M}, \qquad \frac{d\nu}{ds} - \mu\pi = \mathrm{N}.$$

Les quantités L, M, N sont liées par l'identité

$$\mathrm{L}\lambda + \mathrm{M}\mu + \mathrm{N}\nu = 0.$$

L'emploi des cosinus λ, μ, ν donne souvent de la symétrie aux calculs; mais, pour réduire à son minimum le nombre des paramètres nécessaires, je me servirai également d'angles θ et φ, tels que

$$\lambda = \cos\theta, \qquad \mu = \sin\theta\cos\varphi, \qquad \nu = \sin\theta\sin\varphi;$$

θ est alors l'angle de la génératrice avec la directrice et φ l'angle du plan osculateur à la directrice avec le plan tangent à la surface. On calcule facilement les expressions de L, M, N au moyen de θ et φ.

Si la directrice était une droite, j'emploierais des angles θ et φ, le premier conservant la signification qu'il a dans le cas général, le second étant l'angle que le plan passant par la directrice et la génératrice fait avec un plan fixe mené par la directrice. D'ailleurs, la plupart des calculs relatifs au cas général s'appliquent sans difficulté au cas d'une directrice rectiligne.

3. Je prendrai, en général, pour directrice la *ligne de striction*, parce que cette ligne est unique sur une surface gauche et que les formules se simplifient ordinairement dans ce cas. Pour une surface développable, la directrice sera l'arête de rebroussement; les génératrices sont tangentes à cette courbe, donc $\theta = 0$.

La condition pour que la directrice d'une surface gauche soit ligne de striction s'obtient en écrivant que le plan tangent au point situé sur la directrice (*point central*) est perpendiculaire au plan tangent à l'infini. On

trouve ainsi, comme condition nécessaire et suffisante, $\theta =$ const. si la directrice est rectiligne, et

$$L = -\sin\theta\left(\frac{d\theta}{ds} + \omega\cos\varphi\right) = 0$$

si la directrice est une courbe. On déduit de cette dernière relation des théorèmes importants : *Si la ligne de striction coupe la génératrice sous un angle constant, elle est ligne géodésique, et réciproquement;* et, de plus, *Si une ligne géodésique coupe les génératrices sous un angle constant, elle est ligne de striction,* théorèmes dus à M. O. Bonnet.

Paramètre de distribution.

4. Si l'on appelle ψ l'angle qu'un plan tangent à une surface gauche fait avec le *plan central,* on a, r étant la distance du point de contact au point central,

$$\tang\psi = K r.$$

K est une fonction de s seulement, c'est le *paramètre de distribution des plans tangents.* Cette quantité est la limite du quotient de l'angle de deux génératrices infiniment voisines par leur plus courte distance. On a donc, *en supposant que la directrice soit ligne de striction,*

$$K^2 = \frac{da^2 + db^2 + dc^2}{ds^2\sin^2\theta} = \frac{L^2 + M^2 + N^2}{\sin^2\theta}$$

si l'on remarque que $L = 0$ et que l'on a identiquement

$$(M^2 + N^2)(\mu^2 + \nu^2) = (M\mu + N\nu)^2 + (M\nu - N\mu)^2;$$

la première parenthèse étant nulle en vertu d'une identité donnée plus haut, on obtient facilement

$$K = \frac{M}{\nu} = \frac{-N}{\mu} = \pi - \frac{d\varphi}{ds} + \cot\theta\sin\varphi$$

les signes étant pris dans l'extraction des racines de façon que, pour une surface de binormales, on trouve $K = \pi$.

On déduit des formules précédentes les expressions de M et de N au moyen de K, de sorte que l'on obtient les expressions suivantes, utiles

pour beaucoup de calculs,

$$\frac{da}{ds} = K(\alpha'\nu - \alpha''\mu) = K\sin\theta(\alpha'\sin\varphi - \alpha''\cos\varphi),$$

$$\frac{db}{ds} = K(\beta'\nu - \beta''\mu) = K\sin\theta(\beta'\sin\varphi - \beta''\cos\varphi),$$

$$\frac{dc}{ds} = K(\gamma'\nu - \gamma''\mu) = K\sin\theta(\gamma'\sin\varphi - \gamma''\cos\varphi);$$

si la ligne de striction est une droite, on a, en prenant cette droite pour axe des z,

$$a = \sin\theta\cos\varphi, \qquad b = \sin\theta\sin\varphi, \qquad c = \cos\theta;$$

θ étant constant, on en déduit

$$K^2\sin^2\theta = \frac{da^2}{ds^2} + \frac{db^2}{ds^2} + \frac{dc^2}{ds^2} = \sin^2\theta\frac{d\varphi^2}{ds^2},$$

d'où

$$K = \pm\frac{d\varphi}{ds}.$$

Expression de l'arc d'une courbe tracée sur une surface réglée.

5. Si l'on différentie les coordonnées X, Y, Z des points d'une courbe tracée sur une surface réglée, on obtient des expressions de la forme

$$\frac{dX}{ds} = \alpha + r\frac{da}{ds} + a\frac{dr}{ds},$$

de sorte que si l'on appelle Σ l'arc de la courbe considérée, on a

$$\frac{d\Sigma^2}{ds^2} = \frac{dr^2}{ds^2} + 2\frac{dr}{ds}\cos\theta + (L^2 + M^2 + N^2)r^2 + 2Lr + 1;$$

cette expression peut s'écrire sous une forme particulière qui conduit à des résultats intéressants. En groupant dans un carré les termes en $\frac{dr}{ds}$, on a

$$\frac{d\Sigma^2}{ds^2} = \left(\frac{dr}{ds} + \cos\theta\right)^2 + (L^2 + M^2 + N^2)r^2 + 2Lr + \sin^2\theta.$$

Si la directrice est ligne de striction, et seulement dans ce cas, le terme en r

disparaît du trinôme indépendant de $\frac{dr}{ds}$, qui devient alors

$$\sin^2\theta(1 + K^2 r^2).$$

Or, ce trinôme pouvant toujours s'écrire

$$(L^2 + M^2 + N^2)\left(r + \frac{L}{L^2 + M^2 + N^2}\right)^2 + \frac{(L^2 + M^2 + N^2)\sin^2\theta - L^2}{L^2 + M^2 + N^2},$$

on voit que l'équation de la ligne de striction, lorsque la directrice est quelconque, est de la forme

$$r = -\frac{L}{L^2 + M^2 + N^2}.$$

En outre, lorsque la directrice est ligne de striction, le quotient du coefficient de r^2 par le terme indépendant est égal à K^2; de sorte qu'on a, comme expression générale de ce paramètre,

$$K^2 = \frac{(L^2 + M^2 + N^2)^2}{(L^2 + M^2 + N^2)\sin^2\theta - L^2},$$

et si l'on tient compte de l'identité

$$L\lambda + M\mu + N\nu = 0,$$

cette expression se réduit à

$$K = \frac{L^2 + M^2 + N^2}{M\nu - N\mu}.$$

Par exemple, pour une surface formée par les normales principales d'une courbe, on a, en prenant cette courbe pour directrice,

$$r = \frac{\omega}{\omega^2 + \pi^2},$$

$$K = \frac{\omega^2 + \pi^2}{\pi}.$$

Si la directrice est une droite, on trouve sans difficulté pour l'équation de la ligne de striction

$$r = \frac{\sin\theta \frac{d\theta}{ds}}{\frac{d\varphi^2}{ds^2}\sin^2\theta + \frac{d\theta^2}{ds^2}},$$

et pour l'expression du paramètre de distribution

$$K = \pm \frac{\frac{d\varphi}{ds}\sin^2\theta}{\frac{d\varphi^2}{ds^2}\sin^2\theta + \frac{d\theta^2}{ds^2}}.$$

6. Les formules générales, relatives au cas où la directrice est une courbe, sont applicables à l'hypothèse où la surface réglée deviendrait développable, il suffit de faire K infini; la condition que l'on obtient alors est

$$\sin^2\theta\left(\pi + \omega\cot\theta\sin\varphi - \frac{d\varphi}{ds}\right) = 0,$$

et la distance d'un point de la directrice au point correspondant de l'arête de rebroussement est donnée par

$$r = \frac{\sin\theta}{\frac{d\theta}{ds} + \omega\cos\varphi}.$$

Ces formules donnent très simplement toute la théorie des surfaces développables qui passent par une courbe donnée.

7. L'expression de $d\Sigma$ prend une forme particulière qui sera utile lorsqu'on y introduit l'angle i de la courbe avec les génératrices. Si l'on prend pour directrice la ligne de striction, l'angle i est donné par

$$\operatorname{tang}^2 i = \frac{\sin^2\theta(1 + K^2r^2)}{\left(\frac{dr}{ds} + \cos\theta\right)^2};$$

on peut donc écrire

$$\frac{d\Sigma^2}{ds^2} = (1 + K^2r^2)\sin^2\theta(1 + \cot^2 i) = \frac{\sin^2\theta}{\sin^2 i}(1 + K^2r^2),$$

et, comme on sait que

$$Kr = \operatorname{tang}\psi,$$

on a finalement

$$\frac{d\Sigma}{ds} = \frac{\sin\theta}{\sin i\cos\psi}.$$

Lignes asymptotiques.

8. Les lignes asymptotiques jouent un rôle important dans diverses questions relatives aux systèmes de courbes homographiques, dont elles offrent d'ailleurs un premier exemple. Je vais donc chercher l'équation de ces lignes et les expressions des coefficients de cette équation au moyen des quantités qui servent à déterminer complètement une surface gauche.

Les lignes asymptotiques ayant pour propriété essentielle d'avoir en chaque point leur plan osculateur tangent à la surface sur laquelle elles sont tracées, pour avoir leur équation, il suffit d'écrire que le plan osculateur à une ligne contient la génératrice. Le plan osculateur en un point X, Y, Z étant, lorsque les coordonnées courantes sont ξ, η, ζ,

$$\begin{vmatrix} \xi - X & \eta - Y & \zeta - Z \\ \dfrac{dX}{ds} & \dfrac{dY}{ds} & \dfrac{dZ}{ds} \\ \dfrac{d^2X}{ds^2} & \dfrac{d^2Y}{ds^2} & \dfrac{d^2Z}{ds^2} \end{vmatrix} = 0,$$

l'équation des lignes asymptotiques peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha + r\dfrac{da}{ds} & \beta + r\dfrac{db}{ds} & \gamma + r\dfrac{dc}{ds} \\ \omega\alpha' + r\dfrac{d^2a}{ds^2} + 2\dfrac{dr}{ds}\dfrac{da}{ds} & \omega\beta' + r\dfrac{d^2b}{ds^2} + 2\dfrac{dr}{ds}\dfrac{db}{ds} & \omega\gamma' + r\dfrac{d^2c}{ds^2} + 2\dfrac{dr}{ds}\dfrac{dc}{ds} \end{vmatrix} = 0;$$

elle est de la forme

$$2A_0\frac{dr}{ds} + A_1 r^2 + A_2 r + A_3 = 0.$$

9. Le coefficient de r^2 étant toujours

$$A_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \dfrac{da}{ds} & \dfrac{db}{ds} & \dfrac{dc}{ds} \\ \dfrac{d^2a}{ds^2} & \dfrac{d^2b}{ds^2} & \dfrac{d^2c}{ds^2} \end{vmatrix},$$

l'équation $A_1 = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que a, b, c soient liés par une équation linéaire, autrement dit pour que la surface soit

et pour l'expression du pa

6. Les formules g
courbe, sont applica
veloppable, il suffit

et la distance d'u
de rebroussem

Ces form
veloppables

7. L'ex
qu'on y in
pour dire

on peut

et, con

on a fi

ure et *déformation des surfaces réglées.*

montré que, lorsqu'on déformait une surface, le produit des ure principaux restait invariable; l'inverse de ce produit *totale* de la surface au point considéré. Pour une surface ve, en appelant R, R′ les rayons de courbure principaux,

$$\frac{1}{RR'} = -\frac{K^2}{(1+K^2r^2)^2}.$$

nnet a démontré que, si deux surfaces réglées étaient appli- sur l'autre, les génératrices d'une de ces surfaces étaient les des génératrices de l'autre (1). Les lignes de striction se cor- de la même façon, car sur chaque génératrice le point central nt de courbure totale maxima, et la courbure n'a pas changé; outre on a, en ce point central,

$$\frac{1}{RR'} = -K^2,$$

que K n'est pas non plus modifié. L'angle θ que chaque génératrice la ligne de striction ne l'étant pas non plus, comme la valeur de cet uffit à fixer complètement la direction de la génératrice par rapport igne de striction, on voit que *la condition nécessaire et suffisante que deux surfaces gauches soient applicables l'une sur l'autre que le système des fonctions* K *et* θ *de l'arc s soit le même pour les surfaces.* Théorème fondamental et classique.

11. Une surface gauche dépend de trois fonctions arbitraires : on peut rendre pour ces fonctions K, θ et la fonction Ω mise en évidence dans équation des lignes asymptotiques. Les surfaces applicables les unes sur les utres diffèrent par la fonction Ω. Par exemple, pour les surfaces applicables sur l'hyperboloïde de révolution, on a

$$K = \text{const.}, \qquad \theta = \text{const.} \neq 90^\circ.$$

Pour l'hyperboloïde, on a en outre $\Omega = K \operatorname{tg}\theta$.

---

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, XLIIe Cahier, p. 44, et *Comptes rendus*, 1863, LVII, p. 805.

La considération de ces fonctions K, θ, Ω donne facilement des théorèmes sur la déformation des surfaces. J'aurai à me servir des suivants :

Parmi toutes les surfaces gauches applicables les unes sur les autres, il y en a une à plan directeur (Bour). C'est celle pour laquelle la fonction Ω est donnée par

$$\Omega = K \sin\theta \cos\theta.$$

Je montrerai tout à l'heure comment, connaissant K et θ, on peut avoir son équation en coordonnées cartésiennes.

On peut toujours déformer une surface de façon que la ligne de striction devienne ligne de courbure, si cette ligne n'est pas trajectoire orthogonale des génératrices. En effet, l'équation des lignes de courbure, qui peut s'obtenir dès à présent en considérant ces lignes comme bissectrices des angles des asymptotiques et des génératrices, peut s'écrire

$$K \sin\theta \frac{dr^2}{ds^2} + \left[K^2(\Omega - K\sin\theta\cos\theta)r^2 + \frac{dK}{ds}\sin\theta\, r + \Omega\right]\frac{dr}{ds}$$
$$+ (1 + K^2 r^2)(\Omega\cos\theta - K\sin\theta) + \cos\theta\sin\theta\frac{dK}{ds}r = 0;$$

la condition pour que la ligne de striction soit ligne de courbure est

$$\Omega\cos\theta - K\sin\theta = 0.$$

Cette équation détermine Ω toutes les fois que $\theta \neq 90°$. Si θ est constant, la ligne de striction étant géodésique, si elle devient ligne de courbure, elle sera plane.

On pourrait de même établir plusieurs autres théorèmes; je me borne à ceux qui me seront utiles par la suite.

12. Si l'on déforme une surface développable, l'arête de rebroussement reste toujours arête de rebroussement, et sa courbure, étant égale à sa courbure géodésique, n'est pas changée, de sorte que toutes les surfaces pour lesquelles la courbure de l'arête de rebroussement est une fonction donnée de l'arc sont applicables les unes sur les autres. Et, lorsqu'on applique ces surfaces sur un plan, les génératrices deviennent tangentes à une courbe dont la courbure est toujours donnée par la fonction considérée.

Représentation analytique d'une surface à plan directeur.

3. Une surface à plan directeur peut se représenter par les équations

$$y\cos\alpha - x\sin\alpha = F(\alpha), \qquad z = \varphi(\alpha).$$

La première donne la projection de la génératrice sur le plan directeur; enveloppe de cette projection est la projection de la ligne de striction. Le ramètre de distribution est donné par

$$\frac{1}{K} = \frac{dz}{d\alpha} = \varphi'(\alpha).$$

Une surface à plan directeur est déterminée lorsqu'on donne la projection de la ligne de striction sur le plan directeur et le paramètre de distribution. Si la projection de la ligne de striction a pour équation tangentielle

$$f(u, v, w) = 0,$$

la surface à plan directeur est donnée par

$$f(-\sin\alpha, \cos\alpha, x\sin\alpha - y\cos\alpha) = 0, \qquad z = \varphi(\alpha).$$

La dépendance entre la projection de la ligne de striction, le paramètre de distribution et la surface peut s'exprimer sous une forme plus géométrique. La tangente à la ligne de striction fait avec la génératrice et, par suite, avec le plan directeur un angle θ; on a

$$\cos\theta = -\frac{F(\alpha) + F''(\alpha)}{\sqrt{[F(\alpha) + F''(\alpha)]^2 + \varphi'^2(\alpha)}}, \qquad \sin\theta = \frac{\varphi'(\alpha)}{\sqrt{[F(\alpha) + F''(\alpha)]^2 + \varphi'^2(\alpha)}}.$$

Or, le rayon de courbure de la projection de la ligne de striction étant

$$R = -[F(\alpha) + F''(\alpha)],$$

on obtient la relation

$$KR = \cot\theta;$$

de sorte que, si K et θ sont donnés en fonction de s, on peut obtenir la projection de la ligne de striction de la surface à plan directeur qui correspond à ce système de fonctions K et θ, cette projection étant déterminée par son rayon de courbure. J'aurai bientôt occasion de me servir de cette remarque.

DEUXIÈME PARTIE.

SYSTÈMES HOMOGRAPHIQUES COMPOSÉS DE TRAJECTOIRES.

Cas où les trajectoires coupent les génératrices sous un même angle.

1. L'angle i qu'une courbe tracée sur une surface gauche fait avec une génératrice est donné par

$$\operatorname{tang}^2 i = \frac{\sin^2\theta(1+K^2 r^2)}{\left(\frac{dr}{ds}+\cos\theta\right)^2}.$$

Si $\frac{dr}{ds}$ est une fonction entière du second degré en r, $\operatorname{tang}^2 i$ s'exprime par une fraction dont le dénominateur est un carré parfait et dont le numérateur est toujours une somme de deux carrés; car $\sin\theta$ et K sont différents de zéro pour les génératrices non singulières; par suite, le numérateur ne sera jamais divisible par le dénominateur, et $\operatorname{tang}^2 i$ ne peut avoir une valeur indépendante de r que si l'un des termes est identiquement nul. Comme cela ne peut avoir lieu, d'après ce que je viens de dire, pour le numérateur, l'angle i ne peut être constant que si l'on a toujours

$$\frac{dr}{ds}+\cos\theta = 0,$$

c'est-à-dire s'il est droit. Donc les trajectoires orthogonales sont les seules lignes qui, coupant, *toutes sous un même angle,* les génératrices d'une surface gauche, déterminent sur ces génératrices des divisions homographiques.

2. Pour les surfaces développables, l'angle d'une courbe avec les génératrices étant donné par

$$\operatorname{tang} i = \frac{\omega r}{\frac{dr}{ds}+1},$$

on voit que les trajectoires sous un angle constant divisent toujours les génératrices en segments proportionnels. Ceci s'applique aux trajectoires des tangentes à une courbe plane.

Cas où l'angle varie d'une trajectoire à l'autre.

3. *Mise en équation du problème.* — On peut obtenir des systèmes de trajectoires pour lesquels l'angle *constant pour chaque courbe varierait de l'une à l'autre.* Les parallèles d'un hyperboloïde de révolution en donnent un exemple.

Pour obtenir ces systèmes, il suffit d'écrire que

$$\frac{d}{ds}(\text{tang}^2 i) = 0$$

lorsqu'on y remplace $\frac{dr}{ds}$ par une fonction entière du second degré en r. En écrivant que l'équation ainsi fournie est vérifiée, quel que soit r, on a les équations de condition du problème.

Pour simplifier les calculs, je supposerai que l'équation de Riccati, qui définit le système homographique considéré, est prise sous la forme

$$\frac{dr}{ds} + \cos\theta = (\text{A}r^2 + \text{B}r + \text{C})\sin\theta,$$

ce qui est évidemment possible; on a alors

$$\text{tang}^2 i = \frac{1 + \text{K}^2 r^2}{(\text{A}r^2 + \text{B}r + \text{C})^2}.$$

L'équation résultant de l'élimination de $\frac{dr}{ds}$, entre l'équation de Riccati précédente et l'équation $\frac{d}{ds}(\text{tang}^2 i) = 0$, est du cinquième degré en r. Le coefficient de r^5 est $\text{A}^2\text{K}^2\sin\theta$; on en conclut que $\text{A} = 0$. Si l'on tient compte de ce résultat, on voit que le terme du quatrième degré disparaît, et l'on a les équations de condition suivantes en égalant à zéro les quatre autres coefficients

$$\text{K}\frac{d\text{B}}{ds} - \text{B}\frac{d\text{K}}{ds} = 0, \tag{1}$$

$$\text{K}\frac{d\text{C}}{ds} - \text{C}\frac{d\text{K}}{ds} - \text{BCK}\sin\theta = 0, \tag{2}$$

$$\frac{d\text{B}}{ds} + \text{B}^2\sin\theta - \text{CK}^2(\text{C}\sin\theta - \cos\theta) = 0, \tag{3}$$

$$\frac{d\text{C}}{ds} + \text{B}(\text{C}\sin\theta - \cos\theta) = 0. \tag{4}$$

ondent à un
plicables les
quée sur une
et comme dé-
dernières sont

laire $\mu' = 0$. Si

hélicoïdes. Pour les
de la projection



de la ligne de striction d'une surface à plan directeur sur ce plan, on a tc jours

$$KR = \cot\theta.$$

On en déduit immédiatement que, dans le cas actuel, si l'arc de la p: jection est σ, on a

$$R = \mu\sigma,$$

équation qui caractérise une spirale logarithmique. La ligne de striction l'hélicoïde considéré appartient donc à la catégorie d'hélices que M. Tis a étudiées et qu'il a appelées *hélices cylindroconiques*. Je désigner pour abréger, par *conoïdes* et *hélicoïdes logarithmiques* les surfaces q je viens de rencontrer, et par *surfaces logarithmiques* les surfaces gauc applicables sur celles-ci.

6. Si $\mu = 0$, on ne peut plus faire $\mu' = 0$. Si $\theta = 90°$, on a les hélicoï minima, et les surfaces de binormales de courbes à torsion constante $\theta \neq 90°$, on a comme surface à plan directeur un hélicoïde dont la ligne striction est une hélice circulaire, et qui peut être considéré comme un particulier des hélicoïdes logarithmiques. Cet hélicoïde est applicable un hyperboloïde de révolution, de sorte que lorsque $\mu = 0$, $\theta \neq 90°$, obtient les surfaces applicables sur des hyperboloïdes de révolution.

On peut remarquer que le rayon du cylindre sur lequel est tracé ligne de striction de cet hélicoïde est égal au rayon du cercle de gorge l'hyperboloïde sur lequel il est applicable. Plus généralement, une sur à plan directeur, ayant pour ligne de striction une hélice, est applicable la surface que l'on obtient en menant par les points de la projection de l lice des parallèles aux tangentes à cette hélice. En effet, le paramètr distribution de l'hélicoïde s'exprimant par

$$K = \omega\cot\theta + \pi,$$

si l'on déforme la surface de façon que la ligne de striction devienne pl on trouve que le rayon de courbure de cette courbe est donné par

$$KR = \cot\theta,$$

comme celui de la projection de l'hélice.

...ues

... ... pour
...

... des les
... niques.

... sur les di-
... diquer.

... *point le*
...spondant.

...

...on. K et *r* sont
...

...
...
de ... *génératrices en*
... *...res proportion-*
$\theta =$ ... de ces courbes.

C étai
déterm... ...les génératrices; or
... ...ont constants.

Pour les surfaces logarithmiques, l'angle d'une des trajectoires du système homographique étant donné par

$$\tang^2 i = \frac{\lambda^2 + \mu^2 \sin^2\theta}{\mu^2(\lambda + \cos\theta)^2},$$

on voit qu'il y a toujours une de ces trajectoires, celle qui correspond à $\lambda = -\cos\theta$, qui est orthogonale aux génératrices.

8. *Sur les hélicoïdes et conoïdes logarithmiques les trajectoires homographiques sont des hélices cylindroconiques.* En effet, pour une courbe tracée sur l'une de ces surfaces, le cosinus de l'angle que la tangente fait avec la perpendiculaire au plan directeur est

$$\frac{dZ}{d\Sigma} = \frac{dz}{d\Sigma} = \frac{dz}{ds}\frac{ds}{d\Sigma} = \sin i \cos\psi,$$

et, pour les trajectoires en question, i et ψ sont constants; donc ces courbes sont des hélices. Il est facile de reconnaître, d'après les propriétés bien connues de la spirale logarithmique, qu'en faisant tourner autour du pôle la spirale, qui est la projection de la ligne de striction, on obtient les projections des trajectoires homographiques. Ces hélices sont donc cylindroconiques.

Sur les surfaces logarithmiques quelconques, les trajectoires homographiques ont leur rayon de courbure géodésique proportionnel à l'arc, propriété analogue à une propriété de la spirale logarithmique que j'ai eu à citer. En effet, on a, pour une trajectoire sous l'angle i, R_g désignant le rayon de courbure géodésique

$$\frac{1}{R_g} = K \sin\psi \cos\psi \sin i,$$

et, dans le cas actuellement considéré, cette expression devient

$$R_g = \frac{\mu}{\sin\psi}\Sigma.$$

J'aurai occasion de reparler des hélicoïdes et conoïdes logarithmiques, un peu plus loin, à propos des systèmes conjugués.



Un système homographique étant donné par

$$\frac{dr}{ds} + 1 = Ar^2 + Br + C,$$

on a à écrire que

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega r}{Ar + Br + C}\right) = 0,$$

et à éliminer $\frac{dr}{ds}$ entre ces deux équations; on obtient une équation du quatrième degré en r. Le coefficient du quatrième degré étant $2A^2\omega$, on voit que $A = 0$; le terme du troisième degré ayant A en facteur devient nul, et l'on a les équations de condition

$$B\frac{d\omega}{ds} - \omega\frac{dB}{ds} = 0,$$

$$\omega\frac{dC}{ds} - C\frac{d\omega}{ds} - \omega BC = 0,$$

$$\omega C(C-1) = 0.$$

La première équation donne $B = \mu\omega$. La dernière donne soit $C = 0$, soit $C = 1$. Pour $C = 0$, on trouve les trajectoires sur un même angle, quel que soit ω. Pour $C = 1$, ω vérifie l'équation

$$\frac{d\omega}{ds} + \mu\omega^2 = 0,$$

qui s'intègre et donne

$$\frac{1}{\omega} = \mu s + \mu';$$

si $\mu \neq 0$, on peut prendre l'origine des arcs s de façon que $\mu' = 0$.

On a donc les solutions suivantes :

1° $\omega =$ const.; les courbes $r =$ const. sont trajectoires.

2° $\omega s =$ const.; les lignes $r = \lambda s$ sont des trajectoires.

Le développement de ces surfaces sur un plan transforme l'arête de rebroussement en une spirale logarithmique; il en est de même des trajectoires. Pour les surfaces de la première solution, on a des cercles au lieu de spirales.

Il me semble inutile d'insister sur les analogies entre ces résultats et ceux trouvés pour les surfaces gauches.

TROISIÈME PARTIE.

SYSTÈMES CONJUGUÉS. — THÉORÈME GÉNÉRAL.

---

1. Si l'on appelle V l'angle que l'asymptotique passant par un point fait avec la génératrice qui contient ce point; V′, V″ les angles que font avec cette génératrice en ce point deux courbes C′, C″; la considération de l'hyperbole indicatrice montre que la condition nécessaire et suffisante pour que les courbes C′ et C″ soient conjuguées est que

$$(\operatorname{tang} V' + \operatorname{tang} V'') \operatorname{tang} V = 2 \operatorname{tang} V' \operatorname{tang} V''.$$

En exprimant les tangentes des angles qui entrent dans cette équation, au moyen de r, s et des dérivées de r par rapport à s, on a

$$\frac{dr'}{ds} + \frac{dr''}{ds} = 2\frac{dr}{ds},$$

les accents correspondant aux courbes considérées. Comme $\frac{dr}{ds}$ est donné par une fonction entière du second degré en r, on voit qu'il en sera de même de l'une des dérivées qui sont dans le premier membre, si l'autre est donnée par une fonction entière du second degré au plus. Autrement dit :

Si un système de courbes divise homographiquement les génératrices d'une surface gauche, le système conjugué les divise aussi homographiquement (¹).

2. Pour les surfaces qui ne sont pas à plan directeur, $\frac{dr}{ds}$ est donné par une fonction du second degré, dans laquelle le coefficient de r^2 est différent de zéro. Il en résulte que, de deux systèmes homographiques conjugués, l'un au moins donne une division homographique du type le plus général. Pour les surfaces à plan directeur, $\frac{dr}{ds}$ étant une fonction du premier degré,

---

(¹) M. Desmartres a donné sur les surfaces cerclées un théorème analogue (*Comptes rendus*, janvier 1888).

si la division homographique est du type le plus général pour l'un des systèmes, elle est du même type pour l'autre; sinon on a des divisions en segments proportionnels ou égaux. Si une surface à plan directeur est à paramètre de distribution constant, les divisions peuvent être soit toutes deux du type général, soit toutes deux des divisions en segments proportionnels, soit enfin toutes deux des divisions en segments égaux.

Théorème sur les lignes d'ombre.

3. On sait que les sections d'une surface par des plans ayant une droite commune et les courbes de contact des cônes ayant leurs sommets sur cette droite forment deux systèmes conjugués. Pour une surface réglée, le premier système donne évidemment une division homographique des génératrices; il en est de même du second, à cause du théorème précédent. Donc :

Les génératrices d'une surface gauche sont divisées homographiquement par les courbes de contact des cônes dont les sommets sont en ligne droite.

Ce théorème comprend comme cas particulier le théorème suivant, soupçonné par M. Paul Serret : Sur une surface gauche quelconque, quatre lignes d'ombre, issues d'un même point et relatives à des rayons incidents parallèles, coupent une génératrice rectiligne quelconque en quatre points dont le rapport anharmonique est constant; car ces lignes sont conjuguées des sections parallèles au plan tangent, qui a pour point de contact le point commun aux lignes d'ombre, d'après le théorème que j'ai rappelé plus haut. Si la surface considérée est à plan directeur, les lignes d'ombre divisent les génératrices en segments proportionnels; cela résulte de la remarque faite à la suite du théorème général sur les systèmes conjugués.

4. Le théorème que j'ai énoncé tout à l'heure montre comment on peut
ouper les lignes d'ombre en systèmes homographiques. Ce procédé de
upement est le seul. En effet, soient A, B, C, D quatre points d'où
nent des rayons; soient α, β, γ, δ les lignes d'ombre correspondant sur
urface S. Deux de ces lignes, α et β par exemple, ont des points com-
réels ou imaginaires, à savoir les points de contact de la surface S
s plans tangents menés par la droite AB. Or, si l'on a des systèmes



de quatre points de rapport anharmonique constant, la coïncidence de deux de ces points entraîne la coïncidence des autres avec les premiers. Les lignes α, β, γ, δ ont donc des points de concours.

Soient M, M′ deux de ces points, les points d'où émanent les rayons étant à la fois dans le plan tangent en M et dans le plan tangent en M′ sont en ligne droite. Donc, *si un système de lignes d'ombre divise homographiquement les génératrices d'une surface réglée, les rayons émanent de points en ligne droite.*

Systèmes conjugués qui divisent les génératrices en segments égaux.

5. Il résulte de la remarque faite à la suite du théorème général sur les systèmes conjugués que l'on peut obtenir sur les surfaces à plan directeur et à paramètre constant des systèmes conjugués divisant les génératrices en segments égaux. On peut former l'équation générale de ces systèmes en coordonnées cartésiennnes. L'équation générale des surfaces considérées peut s'écrire, si l'on fait, pour abréger, $K = 1$,

$$y \cos z - x \sin z = F(z);$$

l'équation des lignes asymptotiques se réduit, pour ces surfaces, à

$$2 \frac{dr}{ds} + \cos\theta = 0.$$

Si l'on remarque que $dz = ds \sin\theta$ et que $\cot\theta = KR$, R étant le rayon de courbure de la projection de la ligne de striction, l'équation qui exprime que deux systèmes sont conjugués devient

$$\frac{dr'}{dz} + \frac{dr''}{dz} + KR = 0.$$

Or les équations d'une génératrice sont, si l'on met en évidence la ligne de striction,

$$\frac{x + F(z) \sin z + F'(z) \cos z}{\cos z} = \frac{y - F(z) \cos z + F'(z) \sin z}{\sin z} = r,$$

et l'on a facilement, d'autre part,

$$R = -[F(z) + F''(z)],$$

de sorte que si un système de courbes divisant les génératrices en segments égaux est donné par

$$\frac{x + F(z)\sin z}{\cos z} = \frac{y - F(z)\cos z}{\sin z} = \psi(z) + C,$$

$\psi(z)$ étant une fonction arbitraire et C une constante dont la valeur change d'une courbe à l'autre, le système conjugué sera donné par les équations

$$\frac{x + F(z)\sin z}{\cos z} = \frac{y - F(z)\cos z}{\sin z} = \int_0^z F(z)\,dz - F'(z) - \psi(z) + C'.$$

Les asymptotiques sont, sur ces surfaces, les lieux des milieux des segments de génératrices compris entre deux courbes conjuguées des systèmes que je viens de considérer; elles ont pour équations

$$\frac{x + F(z)\sin z}{\cos z} = \frac{y - F(z)\cos z}{\sin z} = \frac{1}{2}\int_0^z F(z) - \tfrac{1}{2}F'(z) + \text{const.}$$

On peut obtenir ces équations en écrivant que les asymptotiques sont leurs propres conjuguées.

Système conjugué des trajectoires orthogonales des génératrices.

6. L'équation du système conjugué des trajectoires orthogonales peut s'écrire

$$\sin\theta\frac{d(Kr)}{ds} + (\Omega - K\sin\theta\cos\theta)(1 + K^2r^2) = 0;$$

elle a pour intégrale

$$\operatorname{arc\,tang} Kr + \int_0^s \frac{\Omega - K\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}\,ds = \text{const.}$$

Pour une surface à plan directeur, la différentielle sous le signe de quadrature est identiquement nulle, de sorte qu'on a simplement

$$Kr = \text{const.}$$

Le système obtenu est donc composé de courbes telles que, en tous leurs points, le plan tangent à la surface fait un angle constant avec le plan central

correspondant. En particulier, en chaque point de la ligne de striction, la direction conjuguée est perpendiculaire aux génératrices.

Sur les hélicoïdes et conoïdes logarithmiques, le système homographique de trajectoires a pour conjugué le système des trajectoires orthogonales; car les premières courbes satisfont à la relation $Kr = \text{const.}$ On voit ainsi que celle de ces courbes qui est trajectoire orthogonale des génératrices est une asymptotique, puisqu'en chaque point sa direction coïncide avec la direction conjuguée.

Si une surface à plan directeur est représentée par les équations

$$y\cos\alpha - x\sin\alpha = F(\alpha), \qquad z = \varphi(\alpha),$$

on trouve, pour le système des trajectoires orthogonales,

$$\frac{x + F(\alpha)\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y - F(\alpha)\cos\alpha}{\sin\alpha} = \int_0^\alpha F(\alpha)\,d\alpha + \text{const.}$$

et, pour le système conjugué,

$$\frac{x + F(\alpha)\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y - F(\alpha)\cos\alpha}{\sin\alpha} = C\varphi'(\alpha) - F'(\alpha).$$

Pour les hélicoïdes et conoïdes logarithmiques, F et φ seraient des exponentielles; les projections des deux systèmes de lignes sur le plan directeur sont des systèmes de spirales logarithmiques; mais le système conjugué des trajectoires orthogonales est seul composé d'hélices, ayant pour axe OZ. Car, sur une surface ayant pour plan directeur $Z = 0$, si une trajectoire orthogonale est une hélice ayant pour axe OZ, les génératrices de la surface sont les normales principales de l'hélice considérée. Or il n'y a qu'une courbe dans ces conditions sur un hélicoïde logarithmique; il n'y en a point sur un conoïde.

Systèmes orthogonaux sur les surfaces gauches.

7. La condition de perpendicularité de deux courbes C′, C″ tracées sur une surface gauche est

$$\frac{dX'}{ds}\frac{dX''}{ds} + \frac{dY'}{ds}\frac{dY''}{ds} + \frac{dZ'}{ds}\frac{dZ''}{ds} = 0,$$

les accents indiquant le long de quelle courbe on doit se déplacer pour prendre des dérivées. Si la directrice est ligne de striction, cette équation devient, lorsqu'on remplace les coordonnées cartésiennes au moyen de r et s,

$$\left(\frac{dr'}{ds}+\cos\theta\right)\left(\frac{dr''}{ds}+\cos\theta\right)+\sin^2\theta(1+K^2r^2)=0.$$

On voit que si $\frac{dr''}{ds}$ est fonction de s seulement, c'est-à-dire si un système de courbes C″ divise les génératrices en segments égaux, le système orthogonal, composé de courbes C′, dépendra d'une équation de Riccati, et par suite donnera une division homographique. Celle-ci ne se réduira jamais à une division en segments proportionnels ou égaux, le coefficient du terme en r^2 ne pouvant être nul.

Si $\frac{dr''}{ds}$ était une fonction linéaire de r, comme K^2r^2+1 n'admet pas de diviseurs réels du premier degré, $\frac{dr'}{ds}$ serait donné par une fraction. Il en serait de même si $\frac{dr''}{ds}$ était une fonction du second degré, à moins que cette fonction ne fût précisément K^2r^2+1, à un facteur près; mais alors $\frac{dr''}{ds}$ s'exprimerait en fonction de s seulement.

Il résulte de cette discussion que, *si un système de courbes divise en segments égaux les génératrices d'une surface gauche, le système orthogonal les divise homographiquement,* cette dernière division étant du type général. Et réciproquement, *si deux systèmes orthogonaux divisent simultanément les génératrices d'une surface gauche en segments homographiques, ce ne peut être que dans le cas précédent,* c'est-à-dire lorsque l'une des divisions se réduit à une division en segments égaux.

Systèmes orthogonaux sur les surfaces développables.

8. La condition d'orthogonalité de deux courbes tracées sur une surface développable est

$$\left(\frac{dr'}{ds}+1\right)\left(\frac{dr''}{ds}+1\right)+\omega^2r^2=0,$$

ω étant la courbure de l'arête de rebroussement, de sorte que, comme dans le cas des surfaces gauches, si un système de courbes divise les génératrices

en segments égaux, le système orthogonal donne une division homographique du type général. Mais ce cas n'est plus le seul; car la partie indépendante des parenthèses, dans l'équation que je viens d'écrire, est décomposable en deux facteurs du premier degré en r, de sorte qu'on pourra avoir des systèmes orthogonaux donnant tous deux des divisions en segments proportionnels; ces systèmes sont donnés par des équations de la forme

$$\frac{dr'}{ds}+1=\mathrm{M}r, \qquad \frac{dr''}{ds}+1+\frac{\omega^2}{\mathrm{M}}r=0,$$

M étant une fonction de s. Comme l'angle d'une courbe avec une génératrice est donné par

$$\tang i=\frac{\omega r}{\dfrac{dr}{ds}+1},$$

les équations précédentes expriment que toutes les courbes d'un système sont coupées sous un même angle par chaque génératrice, l'angle variant en général d'une génératrice à l'autre. Ou, autrement dit, les tangentes aux différentes courbes d'un même système, aux points où elles sont rencontrées par une même génératrice sont parallèles.

Les propriétés précédentes n'étant pas modifiées par la déformation de la surface considérée, les propositions énoncées s'appliquent au système des tangentes à une courbe plane.

En particulier, on peut obtenir des systèmes orthogonaux composés de lignes géodésiques. Chacun de ces systèmes donne, lorsqu'on développe la surface sur un plan, un système de droites parallèles.

Lignes de courbure.

9. Les lignes de courbure constituent des systèmes à la fois orthogonaux et conjugués; les théorèmes précédents montrent que, si un système de lignes de courbure divise homographiquement les génératrices d'une surface gauche :

1° L'autre système les divise aussi homographiquement (théorème sur les systèmes conjugués);

2° Pour l'un des systèmes, la division se fait en segments égaux (théorème sur les systèmes orthogonaux).

Cette dernière condition étant nécessaire et suffisante, la recherche des

surfaces sur lesquelles les lignes de courbure divisent homographiquement les génératrices se ramène à ce problème plus restreint : recherche des surfaces sur lesquelles un système de lignes de courbure divise les génératrices en segments égaux.

L'équation des lignes de courbure, qui peut s'obtenir en écrivant que ces lignes sont orthogonales et conjuguées, est

$$K \sin\theta \frac{dr^2}{ds^2} + \left[K^2(\Omega - K\sin\theta\cos\theta)r^2 + \sin\theta \frac{dK}{ds} r + \Omega\right] \frac{dr}{ds}$$
$$+ (\Omega\cos\theta - K\sin\theta)(1 + K^2 r^2) + \sin\theta\cos\theta \frac{dK}{ds} r = 0.$$

10. Cherchons dans quels cas des solutions de cette équation ne diffèrent que d'une constante. Le premier membre de cette équation est un trinôme du second degré en r dont les coefficients, étant fonctions de s et de $\frac{dr}{ds}$, ne changent pas lorsque l'on augmente r d'une constante. Pour que l'équation, étant vérifiée par une certaine solution $r = r'$, le soit aussi par $r = r' + c$, quelle que soit la valeur de c, il faut et il suffit que les coefficients du trinôme en r^2 soient tous nuls, ce qui donne

$$(\Omega - K\sin\theta\cos\theta)\frac{dr}{ds} + (\Omega\cos\theta - K\sin\theta) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{dK}{ds}\sin\theta\left(\frac{dr}{ds} + \cos\theta\right) = 0, \tag{2}$$

$$K\sin\theta\frac{dr^2}{ds^2} + \Omega\frac{dr}{ds} + (\Omega\cos\theta - K\sin\theta) = 0. \tag{3}$$

Pour une surface gauche $\sin\theta \neq 0$, et les lignes de courbure ne pouvant être des trajectoires orthogonales des génératrices, on a également $\frac{dr}{ds} + \cos\theta \neq 0$, de sorte que l'équation (2) ne peut être vérifiée que si $K = \text{const.}$ En combinant par soustraction les équations (1) et (3), on obtient

$$K\sin\theta\left(\frac{dr}{ds} + \cos\theta\right)\frac{dr}{ds} = 0,$$

d'où l'on déduit, les trois premiers facteurs étant différents de zéro dans les conditions du problème, que les équations considérées ne peuvent être vé-

ons

ons

ache
cette
rbure.
distri-
généra-
rbure.
ute des
une
mini-

g
d.
p

la
tan
l
lign
surf.

a lignes

niques.

de cour-

9. l
et conj
lignes d
face gau.
1° L'a
les systèn
2° Pou
rème sur l
Cette de

euxième
ression du
ente.





Si la surface a ses lignes de courbure homographiques, K est constant, de sorte qu'il reste quatre fonctions liées par trois équations. On peut donc, en général, se donner arbitrairement l'une d'elles, ou chercher parmi les surfaces considérées celles qui possèdent une propriété donnée.

Parmi ces surfaces il n'y en a pas qui soient à plan directeur, car il n'y a pas de surfaces à plan directeur dont la ligne de striction soit ligne de courbure. On peut le voir en remarquant que les normales à une surface à plan directeur, le long de la ligne de striction, étant parallèles au plan directeur, ne peuvent former une surface développable.

13. La ligne de striction peut être géodésique; alors $\varphi = 90°$, $\theta =$ const., $\omega =$ const.; la surface est un hyperboloïde de révolution.

Ce cas n'est pas le seul pour lequel la ligne de striction soit plane. En effet, pour que la ligne de striction soit plane, il suffit que $\varphi =$ const.; si l'on élimine ω entre les équations

$$\frac{d\theta}{ds} + \omega\cos\varphi = 0, \qquad K = \omega\cot\theta\sin\varphi,$$

on obtient l'équation

$$\cot\theta\, d\theta + K\cot\varphi\, ds = 0; \tag{1}$$

d'où l'on déduit, en intégrant et en posant $K\cot\varphi = \frac{1}{p}$,

$$\sin\theta = \sin\theta_0\, e^{-\frac{s}{p}}.$$

Le rayon de courbure de la ligne de striction est alors donné par

$$\frac{\cos\varphi}{R} + \frac{d\theta}{ds} = 0. \tag{2}$$

On peut obtenir les coordonnées des points de cette ligne au moyen de quadratures. Si l'on appelle ε l'angle que la tangente à la ligne de striction fait avec un axe fixe de son plan, l'équation (2) peut s'écrire

$$\cos\varphi\, d\varepsilon + d\theta = 0,$$

qui donne, en posant $\cos\varphi = \frac{1}{m}$,

$$\theta + \frac{\varepsilon}{m} = \text{const.}$$



Je prendrai la direction de l'axe de telle façon que la constante soit égale à $\frac{\pi}{2}$; on peut alors écrire l'équation (1)

$$ds = -p\,d\log\sin\theta = -p\,d\log\cos\frac{\varepsilon}{m} = \frac{p}{m}\operatorname{tang}\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)d\varepsilon.$$

Le rayon de courbure de la ligne de striction étant alors donné au moyen de ε par

$$R = \frac{p}{m}\operatorname{tang}\left(\frac{\varepsilon}{m}\right),$$

les coordonnées des points de cette ligne sont données par

$$dx = \frac{p}{m}\operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{m}\cos\varepsilon\,d\varepsilon,$$

$$dy = \frac{p}{m}\operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{m}\sin\varepsilon\,d\varepsilon.$$

Cette ligne est définie par des équations qui rappellent celles qu'on obtient pour la tractrice ou courbe aux tangentes égales, car il suffirait de faire $m = 1$ pour obtenir la tractrice. Mais il faut remarquer que cette hypothèse $m = 1$ ne peut se réaliser; car

$$m = \frac{1}{\cos\varphi},$$

φ étant l'angle du plan tangent avec le plan de la ligne de striction, on a, nécessairement, $\varphi \neq 0$ et, par suite, $\cos\varphi \neq 1$. La détermination de x et y, en termes finis, s'effectue complètement si m est un nombre commensurable. Je ne crois pas nécessaire d'insister sur des cas aussi particuliers d'un problème déjà très particulier.

Surface de normales principales dont les lignes de courbure divisent homographiquement les génératrices.

14. Si l'on prend pour directrice la courbe dont les normales principales sont les génératrices de la surface considérée, l'équation qui exprime que deux systèmes de courbes sont conjugués est

$$\pi\left(\frac{dr'}{ds} + \frac{dr''}{ds}\right) + \left(\pi\frac{d\omega}{ds} - \omega\frac{d\pi}{ds}\right)r^2 + \frac{d\pi}{ds}r = 0;$$

la condition d'orthogonalité est

$$\frac{dr'}{ds}\frac{dr''}{ds} + (\omega^2 + \pi^2)r^2 - 2\omega r + 1 = 0;$$

par suite, l'équation des lignes de courbure est

$$\pi\frac{dr^2}{ds^2} + \left[\left(\pi\frac{d\omega}{ds} - \omega\frac{d\pi}{ds}\right)r^2 + \frac{d\pi}{ds}r\right]\frac{dr}{ds} - \pi[(\omega^2 + \pi^2)r^2 - 2\omega r + 1] = 0.$$

Pour que les lignes de courbure soient homographiques, il faut et il suffit que le paramètre de distribution soit constant et que la ligne de striction soit ligne de courbure; si l'on pose

$$\frac{\omega}{\pi} = u,$$

on peut exprimer les deux courbures de la directrice par

$$\pi = \frac{\mathrm{K}}{1 + u^2}, \qquad \omega = \frac{\mathrm{K}u}{1 + u^2}.$$

L'équation des lignes de courbure peut alors s'écrire, K étant constant,

$$(1 + u^2)\frac{dr^2}{ds^2} + \left(\mathrm{K}\frac{du}{ds}r^2 - 2u\frac{du}{ds}r\right)\frac{dr}{ds} - [\mathrm{K}^2r^2 - 2\mathrm{K}ur + u^2 + 1] = 0;$$

l'équation de la ligne de striction est

$$r = \frac{\omega}{\omega^2 + \pi^2} = \frac{u}{\mathrm{K}};$$

en écrivant que la ligne de striction est ligne de courbure, on trouve

$$\frac{du^2}{ds^2} - \mathrm{K}^2 = 0,$$

ce qui donne, si l'on choisit l'origine des arcs de façon à faire nulle une constante d'intégration,

$$u = \frac{\omega}{\pi} = \mathrm{K}s.$$

Les deux courbures de la directrice sont alors

$$\pi = \frac{\mathrm{K}}{1 + \mathrm{K}^2s^2}, \qquad \omega = \frac{\mathrm{K}^2s}{1 + \mathrm{K}^2s^2}.$$

L'équation de la ligne de striction étant $r = s$, celle du système de lignes de courbure auquel elle appartient est

$$r = s + \text{const.}$$

QUATRIÈME PARTIE.

LIGNES GÉODÉSIQUES.

---

1. Je me propose de chercher dans quels cas on peut trouver, sur une surface gauche, un système de lignes géodésiques qui divise homographiquement les génératrices. Le problème a des solutions évidentes; car, si l'on déforme une surface du second degré en laissant rectilignes les génératrices d'un système, celles du second système auront pour transformées des lignes géodésiques de la surface obtenue, et ces lignes satisferont à la condition énoncée. Si la surface du second degré est un hyperboloïde de révolution, il y aura sur la surface obtenue par déformation, outre le système correspondant aux génératrices qu'on n'a pas laissées rectilignes, un second système composé des transformées des méridiens. Je crois qu'il n'est pas sans intérêt de montrer que ces cas, reconnaissables *a priori*, sont les seuls qui puissent se présenter, au moins pour les surfaces réglées réelles.

2. Pour qu'une courbe c tracée sur une surface gauche soit géodésique, il faut et il suffit que la normale principale de cette courbe soit perpendiculaire à la génératrice qui passe par son pied, car cette normale est déjà perpendiculaire à la tangente à la courbe c, qui est essentiellement distincte de la génératrice. Si l'on appelle Σ l'arc de la courbe c, les coefficients directeurs de la normale principale de cette courbe sont

$$\frac{d^2X}{ds^2}\frac{d\Sigma}{ds} - \frac{dX}{ds}\frac{d^2\Sigma}{ds^2}, \qquad \frac{d^2Y}{ds^2}\frac{d\Sigma}{ds} - \frac{dY}{ds}\frac{d^2\Sigma}{ds^2}, \qquad \frac{d^2Z}{ds^2}\frac{d\Sigma}{ds} - \frac{dZ}{ds}\frac{d^2\Sigma}{ds^2};$$

la condition de perpendicularité de cette droite et de la génératrice est

$$\left(a\frac{d^2X}{ds^2} + b\frac{d^2X}{ds^2} + c\frac{d^2Z}{ds^2}\right)\frac{d\Sigma}{ds} - \left(a\frac{dX}{ds} + b\frac{dY}{ds} + c\frac{dZ}{ds}\right)\frac{d^2\Sigma}{ds^2} = 0.$$

Si l'on prend pour directrice la ligne de striction, qui conserve sa propriété pendant la déformation de la surface, on trouve, en remplaçant les dérivées des coordonnées cartésiennes par leurs expressions au moyen des coordonnées r et s, une équation différentielle du second ordre. Si l'on re-

marque que, le long de la ligne de striction, on a

$$\frac{d\cos\theta}{ds} = \mu\omega = \sin\theta\cos\varphi.\omega;$$

si l'on pose

$$H^2 = \frac{da^2}{ds^2} + \frac{db^2}{ds^2} + \frac{dc^2}{ds^2},$$

et si l'on remarque que, comme on a

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

on a aussi, en différentiant,

$$a\frac{da}{ds} + b\frac{db}{ds} + c\frac{dc}{ds} = 0$$

et, par suite, en différentiant une seconde fois,

$$a\frac{d^2a}{ds^2} + b\frac{d^2b}{ds^2} + c\frac{d^2c}{ds^2} = -\left(\frac{da^2}{ds^2} + \frac{db^2}{ds^2} + \frac{dc^2}{ds^2}\right) = -H^2,$$

l'équation différentielle des géodésiques peut s'écrire

$$\text{(I)} \qquad (H^2r^2 + \sin^2\theta)\left(\frac{d^2r}{ds^2} - H^2r + \frac{d\cos\theta}{ds}\right)$$
$$= \left(\frac{dr}{ds} + \cos\theta\right)\left(2H^2r\frac{dr}{ds} + H\frac{dH}{ds}r^2 + H^2\cos\theta\, r - \cos\theta\frac{d\cos\theta}{ds}\right).$$

3. *Méthode de discussion.* — Pour déterminer les systèmes *homographiques* de géodésiques, j'ai à chercher dans quels cas l'équation (1) est vérifiée par des fonctions de s vérifiant une équation de la forme

$$\text{(II)} \qquad \frac{dr}{ds} = Ar^2 + Br + C.$$

On peut remplacer, dans l'équation (I), $\frac{dr}{ds}$ et $\frac{d^2r}{ds^2}$ par leurs expressions au moyen de r, déduites de l'équation (II). On a ainsi des expressions du second et du troisième degré pour ces dérivées. L'équation (I) donne, lorsque la substitution est effectuée, une équation que j'appellerai (III), dont les deux membres sont entiers et du cinquième degré en r; les coefficients des termes en r^5 y sont identiquement égaux. En écrivant que les autres coefficients sont égaux, deux à deux, on a cinq équations pour dé-

terminer les cinq fonctions A, B, C, H, θ; les deux dernières caractérisant une catégorie de surfaces applicables les unes sur les autres.

Les équations de condition qu'on obtient en suivant la marche que je viens d'indiquer, et qui semble la plus naturelle, sont des équations différentielles simultanées. On peut éviter la considération d'un pareil système en se servant de la remarque suivante.

Les deux membres de l'équation (III), si l'on y conserve les parenthèses qui figurent dans l'équation (I), sont décomposés en un produit de deux facteurs. La parenthèse $(H^2 r^2 + \sin^2\theta)$ doit, si la seconde parenthèse du premier membre n'est pas nulle, diviser le second membre, et, comme les facteurs du second membre sont supposés avoir leurs coefficients réels, $(H^2 r^2 + \sin^2\theta)$ doit diviser l'un de ces deux facteurs. Les équations de condition obtenues ne contiennent pas les dérivées des fonctions A, B, C, et l'on verra qu'elles suffisent à donner la solution du problème.

Il peut arriver que la parenthèse $\left(\frac{d^2 r}{ds^2} - H^2 r + \frac{d\cos\theta}{ds}\right)$ s'annule en même temps que le second membre. Ce cas est d'ailleurs facile à discuter.

Je vais considérer successivement les trois cas qui, d'après le raisonnement précédent, peuvent se présenter.

1. *Premier cas.* — Supposons que $H^2 r^2 + \sin^2\theta$ divise la première parenthèse qui est

$$A r^2 + B r + C + \cos\theta,$$

on doit avoir

$$B = 0,$$

$$\frac{A}{H^2} = \frac{C + \cos\theta}{\sin^2\theta} = m,$$

m étant une fonction de s seulement. L'équation (II) devient alors

$$\frac{dr}{ds} = m(H^2 r^2 + \sin^2\theta) - \cos\theta.$$

En substituant l'expression de $\frac{dr}{ds}$ et $\frac{d^2 r}{ds^2}$ dans l'équation (I) et en supprimant le facteur $(H^2 r^2 + \sin^2\theta)$ commun aux deux membres, on trouve, toutes réductions faites,

$$m = -\frac{1}{\cos\theta}, \qquad \cos\theta = \text{const.}, \qquad H = \text{const.}$$

Les surfaces correspondant à ce cas sont les surfaces à paramètre constant, dont la ligne de striction coupe les génératrices sous un angle constant, et par suite est ligne géodésique. Ce sont donc l'hyperboloïde de révolution et les surfaces applicables sur cet hyperboloïde. Si l'angle θ avait pu être droit, on aurait eu également l'hélicoïde minimum et les surfaces de binormales des courbes à torsion constante; mais, m devant être fini, $\theta \neq 90°$.

L'équation (II) se réduit, dans le cas actuel, à

$$\cos\theta \frac{dr}{ds} + \mathrm{H}^2 r^2 + 1 = 0;$$

si l'on appelle a le rayon du cercle de gorge de l'hyperboloïde, en remarquant que l'on a pour cette surface

$$\mathrm{H} = \frac{\cos\theta}{a},$$

on obtient, comme intégrale de l'équation précédente,

$$r\cos\theta + a \operatorname{tang}\frac{s - s_0}{a} = 0.$$

Il est facile de vérifier que cette équation correspond aux méridiens de l'hyperboloïde.

5. *Deuxième cas.* — Supposons maintenant que $\mathrm{H}^2 r^2 + \sin^2\theta$ divise la seconde parenthèse, qui est

$$2\mathrm{A}\mathrm{H}^2 r^3 + \left(2\mathrm{B}\mathrm{H}^2 + \mathrm{H}\frac{d\mathrm{H}}{ds}\right) r^2 + (2\mathrm{C} + \cos\theta)\mathrm{H}^2 r - \cos\theta \frac{d\cos\theta}{ds},$$

on trouve tout de suite, comme équations de condition,

$$2\mathrm{A}\mathrm{H}^2 \sin^2\theta - \mathrm{H}^4(2\mathrm{C} + \cos\theta) = 0,$$

$$\left(2\mathrm{B}\mathrm{H}^2 + \mathrm{H}\frac{d\mathrm{H}}{ds}\right)\sin^2\theta + \mathrm{H}^2\cos\theta \frac{d\cos\theta}{ds} = 0.$$

On en tire

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{H}^2(2\mathrm{C} + \cos\theta)}{2\sin^2\theta} = \frac{\mathrm{K}^2(2\mathrm{C} + \cos\theta)}{2},$$

$$\mathrm{B} = -\frac{\dfrac{d\mathrm{H}}{ds}\sin^2\theta + \mathrm{H}\cos\theta\dfrac{d\cos\theta}{ds}}{2\mathrm{H}\sin^2\theta} = -\frac{\dfrac{d\mathrm{K}}{ds}}{\mathrm{K}}.$$

Je remarque que l'expression obtenue pour B est exactement celle du coefficient de r dans l'équation différentielle des asymptotiques, lorsque cette équation est résolue par rapport à $\frac{dr}{ds}$, car on peut l'écrire (en appelant Ω la courbure de la section normale tangente à la ligne de striction),

$$2K\sin\theta\frac{dr}{ds}+K^2(\Omega-K\sin\theta\cos\theta)r^2+\frac{dK}{ds}\sin\theta\, r+\Omega=0.$$

Si l'on pose

$$C=-\frac{M}{2K\sin\theta},$$

M étant une fonction de s, on trouve

$$A=-\frac{K^2(M-K\sin\theta\cos\theta)}{2K\sin\theta}.$$

L'équation qui définit un système homographique de géodésiques doit donc être, si elle existe, de la forme

$$2K\sin\theta\frac{dr}{ds}+K^2(M-K\sin\theta\cos\theta)r^2+\frac{dK}{ds}\sin\theta\, r+M=0.$$

On voit alors qu'en déformant la surface sur laquelle on suppose qu'existe ce système, de façon que la courbure de la section normale tangente à la ligne de striction s'exprime par la fonction M, le système homographique de géodésiques coïnciderait avec le système des asymptotiques, ce qui ne peut arriver si ces lignes sont droites. Autrement dit, les surfaces qu'on pourrait obtenir dans l'hypothèse actuelle doivent être applicables sur des surfaces du second degré et, comme l'on sait *a priori* que ces surfaces satisfont aux conditions de l'énoncé, il est inutile de poursuivre la discussion analytique du cas considéré.

6. *Troisième cas.* — Supposons, enfin, que la parenthèse qui multiplie $H^2r^2+\sin^2\theta$ s'annule en même temps que l'une des parenthèses du second membre. Je remarque d'abord que ce n'est pas $\frac{dr}{ds}+\cos\theta$ qui peut devenir nulle, car cette expression ne devient nulle que pour les trajectoires orthogonales, et l'on sait qu'il ne peut y avoir plus d'une géodésique trajectoire des génératrices, puisque, si une ligne est à la fois géodésique et trajectoire, elle est ligne de striction. D'ailleurs, on voit directement que, si

$$\frac{d^2 r}{ds^2} - H^2 r + \frac{d\cos\theta}{ds} = 0,$$

$$\frac{dr}{ds} + \cos\theta = 0,$$

$$r = 0.$$

nt à considérer le cas où l'on aurait à la fois

$$\frac{d^2 r}{ds^2} - H^2 r + \frac{d\cos\theta}{ds} = 0,$$

$$+ H\frac{dH}{ds} r^2 + H^2 \cos\theta\, r - \cos\theta \frac{d\cos\theta}{ds} = 0,$$

$$\frac{dr}{ds} = A r^2 + B r + C.$$

ntre les deux dernières équations, on trouve

$$= \text{const.}, \qquad B = -\frac{\frac{dK}{ds}}{2K}, \qquad 2C + \cos\theta = 0.$$

$\frac{r}{s^2}$ dans la première équation, on a les équations

$$BC = 0, \qquad B^2 + \frac{dB}{ds} - H^2 = 0;$$

oir $B = 0$, car H^2 est différent de 0; donc

$$\cos\theta = -2C = 0.$$

qu'on peut obtenir sont des surfaces de binormales ou des K vérifie l'équation

$$2K\frac{d^2K}{ds^2} - 3\frac{dK^2}{ds^2} + 4K^4 = 0,$$

ramène facilement au premier ordre. L'intégration donne, une constante et en choisissant l'origine de l'arc s de façon stante d'intégration soit nulle,

$$K = \frac{m}{m^2 + s^2};$$

c'est l'expression qu'on trouve pour le paraboloïde équilatère

$$z = m\frac{y}{x},$$

s étant remplacé par z. Les surfaces qu'on obtiendrait dans ce cas sont donc applicables sur un paraboloïde équilatère.

On peut arriver à ce résultat sans intégration, en remarquant que, pour un conoïde droit, l'équation des asymptotiques est

$$2K\frac{dr}{ds} + r\frac{dK}{ds} = 0,$$

c'est-à-dire précisément l'équation qu'on obtient ici pour le système homographique de géodésiques. Le conoïde en question ayant des lignes à la fois géodésiques et asymptotiques est du second degré; c'est le paraboloïde équilatère.

7. *Résumé de la discussion.* — Cette discussion relative aux lignes géodésiques peut se résumer de la façon suivante :

S'il existe sur une surface gauche un système de lignes géodésiques divisant homographiquement les génératrices, cette surface peut s'obtenir par la déformation d'une surface du second degré.

Il n'existe en général qu'un de ces systèmes, composé des transformées de celles des génératrices qu'on n'a pas laissées rectilignes. Sur les surfaces applicables sur un hyperboloïde de révolution, il existe un second système constitué par les transformées des méridiens.

Les surfaces applicables sur des paraboloïdes se distinguent de celles qui sont applicables sur des hyperboloïdes, en ce que, pour ces dernières, la division homographique produite par les géodésiques est du type général, tandis que, pour les premières, la division se fait en segments proportionnels. Il n'y a jamais de divisions en segments égaux.

8. *Surfaces développables.* — On obtient *a priori* le groupement des lignes géodésiques des surfaces développables en systèmes homographiques. Il suffit de remarquer que si l'on applique la surface sur un plan, les géodésiques deviennent des droites. Or, on voit facilement que si quatre droites déterminent sur une infinité de droites des segments de rapport anhar-

monique constant, ces quatre droites sont concourantes (ou parallèles). Donc toutes les géodésiques partant d'un même point constituent un système homographique, de même que celles dont les tangentes aux points situés sur une même génératrice sont parallèles; ces dernières divisent les génératrices en segments proportionnels. A un système de lignes géodésiques divisant les génératrices en segments proportionnels, correspond un système orthogonal également composé de géodésiques et divisant les génératrices de la même façon.

On a vu que les systèmes orthogonaux qui divisent ces génératrices en segments proportionnels étaient donnés par des équations de la forme

$$\frac{dr}{ds}+1=\mathrm{M}r, \qquad \frac{dr}{ds}+1=\frac{\omega^2}{\mathrm{M}}r.$$

Si l'on détermine M de façon que les systèmes soient composés de géodésiques, ce qui se fait en éliminant les dérivées de l'équation des géodésiques, qui est, dans ce cas,

$$\omega r\left[\frac{d^2r}{ds^2}-\omega r\right]=\left(\frac{dr}{ds}+1\right)\left[2\omega\frac{dr}{ds}+\frac{d\omega}{ds}r+\omega\right],$$

on trouve sans difficulté que, si l'on appelle $d\sigma$ l'arc de contingence de l'arête de rebroussement, les systèmes cherchés sont donnés par

$$\frac{dr}{ds}+1=\omega\,\mathrm{tang}(\sigma-\sigma_0)\times r, \qquad \frac{dr}{ds}+1=\omega\,\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{2}+\sigma-\sigma_0\right)\times r.$$

EXTENSION DE LA MÉTHODE DE GRÄFFE.

MÉTHODE PRATIQUE

POUR LA

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE COMPLÈTE

DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES OU TRANSCENDANTES;

PAR M. E. CARVALLO,

Professeur au Lycée Saint-Louis.

HISTORIQUE.

« *Étant donnée une équation numérique, sans aucune notion d grandeur ni de la nature des racines, en trouver les valeurs num ques, exactes s'il est possible, ou aussi approchées qu'on voudra.* Ce blème n'a pas encore été résolu. C'est l'objet des recherches suivantes.

Ainsi s'exprime Lagrange au commencement de son Mémoire *Sur l solution des équations numériques* (1767). Posé par Viète ([1]), ce probl est étudié d'abord dans des cas spéciaux par lui-même, par Harriot, (tred, Pell, etc. Descartes l'aborde dans toute sa généralité et l'engage une voie nouvelle par sa règle des signes, insuffisante il est vrai.

« Telle qu'elle est néanmoins ([2]), cette règle a été pendant deux siècl qu'on a eu de mieux. Les plus grands analystes, à commencer par Ne et à finir par Lagrange, n'ont pu, malgré leurs efforts, faire un pas d après Descartes. L'équation aux carrés des différences (de Lagra

([1]) *De numerosa potestarum adfectarum resolutione.*

([2]) Bordas-Démoulin, *Le Cartésianisme*, p. 122; 1843.

... quelquefois intermi-
... une règle dont il
... ses efforts aident
... Le théorème exige
... la recherche du plus
... *quel pressenti-*

... l'histoire de cette
... avec un si grand
... Saisis d'admira-
... même talent à
... l'idéal de Sturm
... théorème, puis
... règle de Newton.
... bien justifié que
... publia son Livre

... que la *se-*
... qu'une méthode
... Berlin une mé-
... l'application. E...
... pour que leurs
... sont sépar...
... rapprochés sont ...
... remonte à D...
... mathémat...
... *-Pétersbourg.* ...
... currentes, assign...
... que quelcon...
... que la plus grand...
... *duction à l'Analyse*
... fant. Gräffe au con-
... par une opération
... it le grossissement
... arithmétique pure, est
... elle s'exécute sur
... aire. Plus de difficulté

telle que la recherche du plus grand commun diviseur; plus de tâtonnements dont la longueur indéterminée est incompatible avec les besoins de la pratique. Nous possédons enfin, comment Duhamel l'ignore-t-il? la méthode qu'il réclame en 1866 (¹) « *que tout le monde puisse appliquer avec le même succès* ».

Seulement Gräffe s'est borné à déterminer les *racines réelles et les modules des racines imaginaires, quand ces quantités diffèrent les unes des autres.*

C'est en effet tout ce que ses devanciers se sont proposé. Le célèbre astronome allemand Encke, admirateur de la méthode de Gräffe, se préoccupe dès lors de la compléter. Dans ce but, il publie en 1841 un Mémoire de soixante pages dans l'appendice à l'*Annuaire de l'observatoire de Berlin*. Ce Mémoire, laissé dans l'oubli malgré l'intérêt du sujet et le renom de son auteur, tomba par hasard sous les yeux de D. Miguel Merino, de l'observatoire de Madrid, qui cherchait depuis longtemps, mais en vain, dans les livres français, la méthode pressentie par Bordas et réclamée par Duhamel. Il fut tellement satisfait de sa découverte qu'il publia en espagnol une traduction libre du Mémoire (1879). Dans son enthousiasme, il reproche à nos auteurs leur silence à l'égard du savant allemand et en accuse « la paresse d'esprit, la routine des écoles et le patriotisme très mal entendu ». Mais à côté de ces sévères critiques, M. Merino ne justifie-t-il pas cet oubli d'un travail relégué dans une publication astronomique, spéciale à un observatoire particulier? Lui-même s'étonne de l'y trouver; il en juge la lecture pénible. Pour le mettre à la portée des lecteurs, il a dû séparer les difficultés dans des Chapitres distincts, puis ajouter des exemples et des éclaircissements nombreux. Avec ces modifications, le livre espagnol a 260 pages. Il présente les qualités de clarté et de méthode que le traducteur re-use au Mémoire original. Il y a plus, à côté de son admiration pour méthode de Gräffe, M. Merino avoue que le complément d'Encke ne ré-d pas entièrement au desideratum.

en effet, dans sa recherche des racines imaginaires, Encke n'emprunte eul de Gräffe que la connaissance du module. Par là il méconnaît l'idée e de l'inventeur suisse. La théorie en devient compliquée; l'applica-ge des développements trigonométriques, la formation du plus grand

(¹) ...thodes dans les sciences de raisonnement, 2e Partie, p. 258.



commun diviseur, et retombe ainsi, pour les imaginaires, dans les difficultés de la méthode de Sturm. On le voit, s'il est permis d'apprécier la théorie d'Encke parce qu'elle aborde pour la première fois avec succès les racines imaginaires, il faut bien reconnaître que le savant allemand n'a rien ajouté de *pratique* à la méthode de Gräffe, parce qu'il n'en a pas vu toute la portée.

Dans ce Mémoire, je reprendrai le problème d'Encke. Je démontrerai que la règle de Gräffe donne immédiatement et sans nouveau calcul les racines imaginaires, comme les racines réelles; que la méthode s'applique sans modification au cas des racines d'égal module. On verra même que la démonstration embrasse le cas non abordé jusqu'ici où l'équation proposée a ses coefficients imaginaires.

Dépassant ensuite le but poursuivi par Encke, je démontrerai que la méthode s'applique avec un caractère de supériorité remarquable au cas où le premier membre de l'équation est une fonction holomorphe de l'inconnue. Ce résultat s'étend d'abord au cas des fonctions méromorphes, comme la résolution des équations entières s'étend au cas où le premier membre est une fonction algébrique fractionnaire; puis il s'étend aux autres fonctions en isolant les points critiques.

Je m'efforcerai de donner à l'exposition de la théorie une rigueur qui fait, à mon avis, défaut dans l'œuvre de Gräffe et d'Encke, et qui est nécessaire pour ouvrir à une méthode nouvelle les portes de l'enseignement. C'est l'objet du § II, qui m'est personnel et n'emprunte rien aux Mémoires cités.

On reconnaîtra que je ne me suis pas livré à de vaines spéculations, mais que, toujours guidé par un but pratique, j'ai appliqué chaque point de la théorie à un exemple. Je n'ai même pas craint de m'arrêter aux détails qui sont de nature à faciliter l'exécution des calculs.

§ I. — Introduction à la méthode de Gräffe. — Application.

1. Si l'on désigne par α, β, γ les racines de l'équation

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0, \tag{1}$$

on a

$$\alpha + \beta + \gamma = -A, \qquad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = +B, \qquad \alpha\beta\gamma = -C. \tag{2}$$

Pour fixer les idées, supposons provisoirement les racines réelles, distinctes, positives, et soit $\alpha > \beta > \gamma$. Faisons enfin cette hypothèse fondamentale, que :

A l'ordre d'approximation qu'on veut porter au calcul des racines, β est négligeable devant α, et γ devant β.

Si, par exemple, on veut les racines avec cinq chiffres exacts, je suppose que β est inférieur à une unité du cinquième chiffre de α. Dans ces conditions, les formules (2) se réduisent aux formules approchées

$$\alpha = -A, \qquad \alpha\beta = B, \qquad \alpha\beta\gamma = -C, \tag{3}$$

et l'équation (1) sera résolue immédiatement par les formules

$$\alpha = -A, \qquad \beta = -\frac{B}{A}, \qquad \gamma = -\frac{C}{B}. \tag{4}$$

Si l'hypothèse fondamentale n'est pas réalisée par les nombres α, β, γ, elle le sera par les nombres α^μ, β^μ, γ^μ, pourvu qu'on prenne μ assez grand. On formera donc l'équation aux puissances μ des racines de l'équation proposée; on calculera les solutions de la nouvelle équation au moyen des formules (4) et, en extrayant les racines $\mu^{\text{ièmes}}$ de ces solutions, on aura celles de la proposée.

Telle est, en principe, la méthode de Gräffe. Il est évident qu'elle s'applique à une équation de degré quelconque, que l'hypothèse des racines positives n'est pas nécessaire. Enfin, nous verrons qu'elle s'applique aussi bien aux racines égales et aux racines imaginaires.

Comme il serait malaisé de déterminer *a priori* le nombre μ et de former d'un coup l'équation aux puissances μ des racines, il est préférable de

former l'équation aux carrés des racines de la proposée, puis l'équation aux carrés des racines de cette transformée, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on arrive à une équation qui satisfasse à l'hypothèse fondamentale, ce qu'on reconnaîtra à des caractères très simples que nous donnerons plus loin. De plus, dans la pratique, il est préférable de former l'équation aux *carrés changés de signes* des racines ; nous l'appellerons la *transformée* de la première.

2. *Formation de la transformée aux carrés changés de signes des racines.* — Soit l'équation

$$(1)\quad 0 = f(x) = x^m + A_{m-1}x^{m-1} + A_{m-2}x^{m-2} + \ldots + A_1 x + A_0 = \varphi(x^2) + x\,\psi(x^2),$$

les polynômes

$$\varphi(x^2) = A_0 + A_2 x^2 + \ldots, \qquad x\,\psi(x^2) = A_1 x + A_3 x^3 \ldots$$

représentant la somme des termes de degré pair et la somme des termes de degré impair. Je pose

$$(2)\qquad y = -x^2,$$

et j'élimine x entre les équations (1) et (2). Pour cela, je remplace dans l'équation (1) x^2 par $-y$. J'obtiens

$$(3)\qquad \varphi(-y) + x\,\psi(-y) = 0.$$

Puis, de cette équation, je tire la valeur de x que je porte dans l'équation (2). Il vient, après avoir chassé les dénominateurs,

$$(4)\qquad \varphi^2(-y) + y\,\psi^2(-y) = 0.$$

Le système des équations (3), (4) est équivalent au système (1), (2). L'équation (4) est de degré m, comme l'équation (1), et donnera m racines. Connaissant l'une d'elles, on pourra tirer de l'équation (3) la valeur correspondante de x. Cette observation est inutile quand on sait que la valeur de x est réelle et positive, car il suffit alors d'extraire la racine carrée de $-y$; mais elle devient précieuse quand on ignore la nature des solutions de l'équation donnée. Elle lève l'hésitation qui provient des deux racines carrées de $-y$.

Quelle est maintenant la loi de formation des termes de l'équation (4)? Cherchons par exemple les termes en y^{2p}. L'un d'eux est le carré du terme

de degré p dans $\varphi(-y)$, lequel répond au terme de degré $2p$ dans $\varphi(x^2)$. Ce terme est donc

$$A_{2p}^2 y^{2p}.$$

Dans le développement du carré de $\varphi(-y)$, on trouve aussi les doubles produits des termes équidistants de $A_{2p}y^p$. Les termes ainsi accouplés étant affectés du même signe, leur produit a le signe $+$. On aura donc dans l'équation (4) les termes

$$+ 2A_{2p-2}A_{2p+2}y^{2p} + 2A_{2p-4}A_{2p+4}y^{2p} \ldots.$$

Dans le développement de $y\psi^2(-y)$, les termes de degré $2p$ proviennent des termes en y^{2p-1} de $\psi^2(-y)$. Or ceux-ci sont les doubles produits des termes en y^{p-1} et y^p, y^{p-2} et y^{p+1}, ... de $\psi(-y)$. Comme les termes de $\psi(-y)$ sont affectés alternativement de signes contraires, les doubles produits sont affectés du signe —. De plus, le terme en y^p de $\psi(-y)$ répond au terme en x^{2p+1} de $f(x)$. Son coefficient est donc A_{2p+1}. D'après cela, les termes de degré $2p$ dans le développement de $y\psi^2(-y)$ sont

$$- 2A_{2p-1}A_{2p+1}y^{2p} - 2A_{2p-3}A_{2p+3}y^{2p} \ldots.$$

J'ai considéré, dans l'équation (4), les termes d'un degré $2p$. En considérant les termes d'un degré impair, on trouve la même loi; savoir :

Règle. — *Le coefficient d'un terme quelconque de la transformée égale le carré du coefficient correspondant de l'équation donnée, moins le double produit des deux coefficients qui le comprennent, plus le double produit des coefficients qui comprennent ceux-ci, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à un des termes extrêmes de l'équation.*

3. Familiariser dès maintenant le lecteur avec la pratique de la méthode, lui donner la mesure de sa simplicité, lui suggérer les questions à résoudre pour établir la théorie sur des bases certaines, tel est le but important que j'atteindrai d'un coup par un exemple.

Soit l'équation proposée par Lagrange (1)

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Voici, sans omettre un seul chiffre, la reproduction fidèle du calcul des transformées successives :

---

(1) *Traité de la résolution des équations numériques*, Chap. IV.

	x^3.	x^2.	x^1.	x^0.
2^0	+ 1	0	− 7	+ 7
		0	+ **1**.49 (1)	
		+ **1**.14	0	
2^1		+ **1**.14	+ **1**.49	+ **1**.49
		+ **2**.196	+ **3**.2401	
		− 98	− 1372	
2^2		+ **1**. 98	+ **3**.1029	+ **3**.2401
		+ **3**.961	+ **6**.1059	
		− 2058	− 471	
2^3		+ **3**.7552	+ **5**. 588	+ **6**.577
		+ **7**.5700	+**11**.3458	
		− 117	− 871	
2^4		+ **7**.5583	+**11**.2587	+**13**.333
		+**15**.3119	+**22**.6693	
		»	− 371	
2^5		+**15**.3119	+**22**.6322	+**27**.1109
		+**30**.972	+**45**.3995	
		»	− 7	
2^6	+ 1	+**30**.972	+**45**.3988	+**54**.1230

Exécuté avec la règle à calcul, il est disposé en Table à double entrée. Les en-têtes 2^0, 2^1, 2^2, ... qui affectent les lignes indiquent que ces lignes présentent les coefficients de l'équation où l'inconnue est respectivement x, $-x^2$, $-x^4$, ... Quant aux puissances de l'inconnue affectées par les divers coefficients d'une même ligne, elles sont marquées par les en-têtes de colonnes x^3, x^2, x^1, x^0. Ainsi la lecture de la dernière ligne 2^6 nous apprend que l'équation

$$y^3 + \mathbf{30}.972 y^2 + \mathbf{45}.3988 y + \mathbf{54}.1230 = 0$$

a pour racines les valeurs de $-x^{2^6}$ ou $-x^{64}$.

On voit qu'à partir de cette transformée, chaque ligne se déduirait de la

(1) A cause des élévations au carré répétées, les coefficients augmentent de façon à contenir un nombre de chiffres trop grand pour qu'on songe à les écrire. Ainsi le dernier nombre de la ligne 2^6 s'écrirait en 55 chiffres. Pour obvier à cet inconvénient, j'écris en caractères gras et en avant des chiffres connus du nombre la caractéristique de son logarithme, ou mieux le rang de son premier chiffre à gauche relativement au chiffre des unités affecté du rang 0.

Première extension de la méthode de Gräffe. — Théorie de -solution numérique complète des équations algébriques.

nitions. — 1° *Approximations dans les imaginaires.* — Soit M l'imaginaire z. Il est clair que la précision de la position du représente la précision de z. De là les définitions suivantes, où l'on ar M' l'affixe de z', valeur approchée de z.

ur absolue de z' est $z' - z$. Elle est représentée par le vecteur MM'. *randeur* de cette erreur est la longueur MM' ou $\operatorname{mod}(z' - z)$.

reur relative de z' est $\dfrac{\mathrm{MM'}}{\mathrm{OM}} = \dfrac{\operatorname{mod}(z'-z)}{\operatorname{mod} z}$.

ginaire, représentée par le vecteur MM', est *négligeable* devant z on module est inférieur à la grandeur d'erreur absolue qu'on tolère ou bien encore quand $\dfrac{\mathrm{MM'}}{\mathrm{OM}}$ est inférieur à l'erreur relative qu'on to- z.

rdre des racines. — Ces considérations conduisent à ranger les ra- l'une équation suivant l'ordre de grandeur de leurs modules, sauf à arbitraire l'ordre des racines qui ont même module. Nous choisirons décroissant. Les racines et leurs modules seront représentés res- vement par des lettres grecques et par les lettres romaines correspon-

Racines séparées. — Je dirai que deux racines consécutives sont *sé-* quand la deuxième sera *négligeable* devant la première.

Terme régulier. — Dans le calcul des transformées successives de on proposée, d'après la règle (n° 2), considérons les coefficients d'une puissance de l'inconnue. S'il arrive qu'à partir d'un certain rang le nt en question soit toujours le carré du précédent, les doubles pro- i s'y ajoutent étant négligeables devant ce carré, je dirai que ce nt est *régulier* à partir de la transformée correspondante.

mbre des transformées nécessaires pour séparer deux racines tives α *et* β. — Ce nombre ne dépend évidemment que du rapport es et de la précision qu'on veut apporter au calcul. Je considère la ée aux puissances μ des racines de la proposée. Nous voulons pare les racines α et β, c'est-à-dire que β^μ soit négligeable devant e $\dfrac{b^\mu}{a^\mu}$ soit plus petit que l'erreur relative ε qu'on tolère sur la ra-

par une méthode que j'exposerai plus loin et qui se rattache à la fois à celles de Horner, de Lagrange et de Newton. On pourrait aussi faire de suite le calcul précédent avec la précision demandée aux résultats; mais nous verrons que ce procédé serait moins avantageux.

5. Passons maintenant à une simplification dont le caractère théorique a une très grande portée. Dès la transformée 2^4, on observe ce fait fondamental que chaque coefficient de la colonne x^2 est le carré du précédent; le double produit des coefficients qui le comprennent étant négligeable devant ce carré, le coefficient de x^2 devient *régulier*. C'est l'indice qu'on a atteint l'objet même de la méthode, à savoir que les deux dernières racines sont négligeables devant la première. La première racine est *séparée* des deux autres. Dès lors, si je désigne par A, B, C les coefficients de la transformée 2^4, et par a, b, c les valeurs absolues de ses racines, les relations

$$a + b + c = \mathrm{A}, \qquad ab + ac + bc = \mathrm{B}, \qquad abc = \mathrm{C}$$

se réduisent à

$$a = \mathrm{A}, \qquad a(b + c) = \mathrm{B}, \qquad abc = \mathrm{C}.$$

Les nombres a, b, c s'obtiennent donc, au signe près, en résolvant les équations

$$x + \mathrm{A} = 0, \qquad x^2 + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}x + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} = 0,$$

lesquelles s'obtiennent en *décomposant* l'équation donnée

$$x^3 + \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}x + \mathrm{C} = 0$$

en ces deux autres

$$x^3 + \mathrm{A}x^2 = 0, \qquad \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}x + \mathrm{C} = 0.$$

Ce résultat remarquable est tout à fait général. Il est le véritable principe de la méthode de Gräffe. C'est faute d'en avoir reconnu la généralité que son ingénieux inventeur a dû se borner à chercher les modules des racines. La même cause a égaré son illustre successeur Encke dans ses recherches sur le calcul des racines imaginaires. Sa méthode sort tout à fait de l'esprit de la méthode de Gräffe, ce qui en diminue la portée et en exclut la simplicité.

Nous possédons maintenant toutes les notions qui serviront à établir la théorie qui fait l'objet du paragraphe suivant.

nombre d'opérations est augmenté des nombres de la deuxième colonne de la Table II. Ainsi :

Pour séparer 2 racines dont le rapport est 1,5, il faut.....	$2^{\text{transf}},5$
Pour faire le calcul avec 5 chiffres exacts, il faut..........	$2^{\text{transf}},3$
Total.........	5 transformées

Ainsi la cinquième transformée, c'est-à-dire celle qui donne les valeurs de x^{2^5}, séparera, parmi les racines de la proposée, celles dont les modules sont au moins dans le rapport 1,5. On voit aussi que le nombre des transformées nécessaires augmente rapidement quand le rapport $\frac{a}{b}$ se rapproche de 1. Pour $\frac{a}{b} = 1$, il est infini. Il ne serait guère raisonnable de faire plus d'une dizaine de transformées, c'est-à-dire de séparer des racines dont la plus grande dépasserait la plus petite de moins de $\frac{1}{1000}$ de leur valeur; mieux vaut les considérer comme égales dans une première approximation. Dès lors, il n'y a pas lieu en général de porter une très grande précision au calcul des transformées successives. On y trouvera cet énorme avantage de pouvoir exécuter toutes les opérations avec la règle à calcul; en évitant ainsi l'usage des Tables de logarithmes, le calculateur aura très rapidement séparé les racines qui peuvent l'être avec cette approximation.

9. Théorème. — *Pour que les racines α_p et α_{p+1} du polynôme $f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_p x^{m-p} + \ldots + A_m$ soient séparées, il faut et il suffit que $\left(\frac{A_{p+k}}{A_p}\right)^{\frac{1}{k}}$ soit négligeable devant $\left(\frac{A_p}{A_{p-l}}\right)^{\frac{1}{l}}$ pour toutes les valeurs de k et de l. Le polynôme $f(x)$ se sépare alors en deux fragments. Le premier, obtenu en négligeant les termes qui suivent A_p, donne les p premières racines. Le second fragment, obtenu en négligeant les termes qui précèdent A_p, donne les $m - p$ dernières racines.*

Je suppose a_{p+1} négligeable devant a_p.

Le coefficient A_p égale la somme des produits p à p des racines. Le premier de ces produits est $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$. Un autre produit s'obtient en remplaçant, au moins, une des p premières racines par une des suivantes qui sont négligeables devant les premières. Ce nouveau produit est donc négligeable devant le premier, et l'on a, à l'approximation du calcul,

$$\operatorname{mod} A_p = a_1 a_2 \ldots a_p.$$

l'ordre de

ème

égligeable de-

proximation.

C. Q. F. D.

devant

s petite va-

ns $f(x)$, je

t le terme

ème, si l'on

mes qui suivent

Dès lors,

de x dont

car le

les unes

à celui

négligeable

8.

deux

Po

transf

exacts.

n'en pe

nombre d'opérations est augmenté des nombres de la deuxième colonne de la Table II. Ainsi :

Pour séparer 2 racines dont le rapport est 1,5, il faut.....	$2^{\text{transf}},5$
Pour faire le calcul avec 5 chiffres exacts, il faut..........	$2^{\text{transf}},3$
Total.........	5 transformées

Ainsi la cinquième transformée, c'est-à-dire celle qui donne les valeurs de x^{2^5}, séparera, parmi les racines de la proposée, celles dont les modules sont au moins dans le rapport 1,5. On voit aussi que le nombre des transformées nécessaires augmente rapidement quand le rapport $\frac{a}{b}$ se rapproche de 1. Pour $\frac{a}{b}=1$, il est infini. Il ne serait guère raisonnable de faire plus d'une dizaine de transformées, c'est-à-dire de séparer des racines dont la plus grande dépasserait la plus petite de moins de $\frac{1}{1000}$ de leur valeur; mieux vaut les considérer comme égales dans une première approximation. Dès lors, il n'y a pas lieu en général de porter une très grande précision au calcul des transformées successives. On y trouvera cet énorme avantage de pouvoir exécuter toutes les opérations avec la règle à calcul; en évitant ainsi l'usage des Tables de logarithmes, le calculateur aura très rapidement séparé les racines qui peuvent l'être avec cette approximation.

9. Théorème. — *Pour que les racines* α_p *et* α_{p+1} *du polynôme* $f(x)=x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_px^{m-p}+\ldots+A_m$ *soient séparées, il faut et il suffit que* $\left(\frac{A_{p+k}}{A_p}\right)^{\frac{1}{k}}$ *soit négligeable devant* $\left(\frac{A_p}{A_{p-l}}\right)^{\frac{1}{l}}$ *pour toutes les valeurs de k et de l. Le polynôme* $f(x)$ *se sépare alors en deux fragments. Le premier, obtenu en négligeant les termes qui suivent* A_p*, donne les p premières racines. Le second fragment, obtenu en négligeant les termes qui précèdent* A_p*, donne les* $m-p$ *dernières racines.*

Je suppose a_{p+1} négligeable devant a_p.

Le coefficient A_p égale la somme des produits p à p des racines. Le premier de ces produits est $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p$. Un autre produit s'obtient en remplaçant, au moins, une des p premières racines par une des suivantes qui sont négligeables devant les premières. Ce nouveau produit est donc négligeable devant le premier, et l'on a, à l'approximation du calcul,

$$\operatorname{mod} A_p = a_1 a_2 \ldots a_p.$$

A_{p+k} a pour premier terme $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p\ldots\alpha_{p+k}$ d

$a_1 a_2 \ldots a_p a_{p+1} \ldots a$

Les autres termes sont du même ordre de g
Le terme A_{p+k} ne peut donc pas dépasser l'
ni $\frac{A_{p+k}}{A_p}$ dépasser l'ordre de $a_{p+1}\ldots a_{p+k}$, l
$(a_{p+1})^k$. Enfin $\left(\frac{A_{p+k}}{A_p}\right)^{\frac{1}{k}}$ est, au plus, de
est, au moins, de l'ordre de a_p. Com
vant a_p, $\left(\frac{A_{p+k}}{A_p}\right)^{\frac{1}{k}}$ est négligeable deva

Réciproquement, je suppose qu
pour toutes les valeurs de k et de
Soient K la plus grande val
leur du second. Par hypothèse,
donne à x une valeur

On a, en comparant le

Si donc η est un n
$A_p x^{m-p}$ sont néglige
donne à la variable
$A_p x^{m-p}$ sont négli
l'équation $f(x)$
l'ordre de grand
terme $A_p x^{m-p}$ ne
d'ordre au moi
de K. Il en rés
devant L, les p

3.

une

$-3+7.$

…one la première racine est bien séparée

…ul (nº 3) en s'arrêtant à la transformée 2^4.
…par l'équation, réductible au premier degré,

$$\ldots x^3 + A_1 x^2 = 0;$$

…n du second degré,

$$\ldots x^2 + A_2 x + A_3 = 0.$$

…quels on reconnaît la nature des racines. — Me …efficients sont réels, j'examinerai trois hypothèses … et les caractères qui en résultent pour les transfor-

…t toutes réelles. — Alors les transformées, à partir … racines négatives; par suite, les coefficients sont posi- …le l'exemple (nº 3). Si les valeurs absolues de toutes ces …lus distinctes, tous les coefficients deviendront réguliers.

…n a une racine multiple réelle, séparée des autres. — Soit … racine double. Les coefficients A_{p-1} et A_{p+1} sont réguliers; …fficient A_p, il a pour valeur principale

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}(\alpha_p+\alpha_{p+1}) = 2a_1a_2\ldots a_{p-1}a_p.$$

… au calcul du terme correspondant de la transformée suivante. …ord le carré du coefficient précédent

$$+4a_1^2a_2^2\ldots a_{p-1}^2a_p^2;$$

…avec le signe —, le double produit des deux termes qui le com- …ent

$$-2\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}\alpha_p\alpha_{p+1} = -2a_1^2a_2^2\ldots a_{p-1}^2a_p^2.$$

§ III. — Pratique de la méthode.

11. *Caractères signalant les racines séparées. — Simplification.* — Pour que les racines α_p et α_{p+1} soient séparées à l'approximation ε, et que de ce fait l'équation se fragmente sur le terme A_p, il faut et il suffit que l'inégalité

$$\left(\frac{A_{p+k}}{A_p}\right)^{\frac{1}{k}} < \varepsilon\left(\frac{A_p}{A_{p-l}}\right)^{\frac{1}{l}} \tag{1}$$

soit satisfaite pour toutes les valeurs de k et de l (n° 9). En particulier, si l'on fait $l = k$, on a l'inégalité nécessaire

$$\left(\frac{A_{p+k}}{A_p}\right)^{\frac{1}{k}} < \varepsilon\left(\frac{A_p}{A_{p-k}}\right)^{\frac{1}{k}} \quad \text{ou} \quad A_{p-k}A_{p+k} < \varepsilon^k A_p^2. \tag{2}$$

Elle signifie que le coefficient A_p est devenu régulier (n° 6), et ce caractère ne manquera pas de signaler les racines séparées. Si la théorie ne permet de le regarder que comme un avertissement, jamais pour ainsi dire il ne trompera dans la pratique, pourvu qu'on s'assure, non pas qu'un double produit est *accidentellement* nul, mais que son influence a diminué progressivement jusqu'à disparaître ([1]). On le contrôlera par la condition (1) qui est suffisante (n° 9). Celle-ci peut s'écrire

$$\frac{1}{k}[\log A_{p+k} - \log A_p] < \log\varepsilon + \frac{1}{l}[\log A_p - \log A_{p-l}]. \tag{3}$$

Comme il ne s'agit ici que de comparer l'ordre de grandeur des rapports de l'inégalité (1), il suffit de remplacer ces logarithmes par leurs caractéristiques. Revenons à l'exemple de Lagrange (n° 3). Dès la transformée 2^4, le coefficient A_1 de x^2 est régulier, et l'on a

$$A_1 = 7.5583, \qquad A_2 = 11.2587, \qquad A_3 = 13.333. \tag{2^4}$$

De plus, les opérations étant faites avec la règle à calcul, on a sensible-

---

([1]) Si le terme A_p demeure régulier pendant un certain nombre de transformées, ou si, dans ces transformées, il est devenu régulier par diminution progressive de l'influence des doubles produits, on peut affirmer que, *sauf des cas très spéciaux*, les racines α_p et α_{p+1} sont séparées. Cette exception possible m'a déterminé à ne pas publier les recherches que j'ai faites dans cette voie.

$…^2 - 2x + 2 = 0.$

x^2.	x^1.	x^0.
1	− 2	+ 2
1	+ 4	
4	+ 4	
5	+ 8	+ 4
+ 1.25	+ 1.64	
16	− 40	
+ 0. 9	+ 1.24	+ 1.16
+ 1.81	+ 2.576	
− 48	− 288	
1.33	+ 2.288	+ 2.256
+ 3.1089	+ 4.829	
− 576	− 169	
+ 2.513	+ 4.660	+ 4.6553
+ 5.2633	+ 9.436	
− 1320	− 7	
+ 5.1313	+ 9 429	+ 9.4295

…formées présente le caractère des racines toutes …' montre que, pour la dernière racine, on a $c = 1$; … x^2 est sensiblement égal à la correction du double premières racines sont égales. Leur valeur commune …s deux relations

$$…a^{2^5} = 5.1313, \qquad a^{2\times 2^5} = 9.429,$$

…lication. On en déduit

$$a^{32} = 4.6565, \qquad \log a = 0,1505,$$
$$… \log a = 4,8172, \qquad a = 1,414.$$

Pour fixer les signes, on substitue dans l'équation mise

$$x(x^2 - 2) = x^2 - 2,$$

…ement que les racines sont

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{2} = \pm 1,414, \qquad \gamma = +1.$$

…*exemple.* — Je considère l'équation plus difficile pro-



Les autres doubles produits sont négligeables. La somme algébrique des termes (1) et (2) est

$$+2a_1^2a_2^2\ldots a_p^2.$$

En résumé, les termes A_{p-1} et A_{p+1} sont réguliers. Le coefficient A_p, sans être régulier à proprement parler, n'est pas non plus entièrement irrégulier, le carré de ce coefficient subissant une correction de double produit égale à la moitié de ce carré, égale aussi au résultat de la correction.

La même analyse s'applique à une racine d'un degré de multiplicité quelconque.

3° *Considérons enfin un couple de racines imaginaires.* — Soient α_p et α_{p+1} ces racines de module a_p et d'argument θ. Je les suppose séparées des autres : les coefficients A_{p-1} et A_{p+1} sont réguliers; de plus, on a

$$A_p = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}(\alpha_p + \alpha_{p+1}) = 2a_1a_2\ldots a_{p-1}a_p\cos\theta.$$

Pour le terme correspondant de la transformée, on aura

$$\left.\begin{array}{l} 4a_1^2a_2^2\ldots a_p^2\cos^2\theta \\ -2a_1^2a_2^2\ldots a_p^2 \end{array}\right\} = 2a_1^2a_2^2\ldots a_p^2\cos 2\theta.$$

Les angles θ, 2θ, $2^2\theta$, ... varient rapidement, de façon à passer souvent d'un cadran à un autre. Aussi le terme A_p change-t-il souvent de signe. C'est là un trait caractéristique des racines imaginaires.

Les relations précédentes, qui se vérifient exactement à partir de la transformée qui sépare les racines, sont seulement approchées, mais de plus en plus à mesure qu'on approche de cette transformée finale. Cela dispense de calculer les transformées suivantes pour constater que les caractères en question persistent.

Je vais maintenant donner quelques exemples.

13. *Premier exemple.* — A partir de la première transformée, l'équation a une racine double.

Soit l'équation

$$x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0.$$

Le calcul, disposé comme dans le premier exemple (n° 3), est fait également avec la règle à calcul.

$= 11,4079$

$\cos 256\omega = 15,6435$

$= 19,6314$

:uit des égalités (1) :

$a = 1,960$

$b = 1,538$

$c = 1,109$

-, je dois substituer les valeurs
- la forme (nº 2)

$x^2 + 6 = 0.$

De plus, le produit des trois ra-
3 est positive et l'autre négative;
tive. On a donc finalement

$538, \quad \gamma = +1,109.$

d'imaginaires, on déduit des éga-

$\log(s^2)^{256} = 8,6235$

$\log s = 0,0168$

$s = 1,039$

obtenir d'abord $\cos 640$ et $\cos 256\omega$

$\log s^{256} = 4,3117$

$\log 2s^{256} = +4,6127$

$\log 2s^{256}\cos 256\omega = +4,2356$

$\log\cos 256\omega = +\bar{1},6229$

$60^\circ \quad 256\omega = 65^\circ,2 + k'.360^\circ$

---

mes, je place le signe du nombre devant son
lusion, puisque le signe du logarithme porte





posée par Fourier (¹),

$$x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0.$$

J'épargne au lecteur le calcul des cinq premières transformées; il reste :

	x^7.	x^6.	x^5.	x^4.	x^3.	x^2.	x^1.	x^0.
2^0	+ 1	0	− 2	0	− 3	+ 4	− 5	+ 6
2^1		+ 4	− 2	− 2	+ 29	− 14	− 23	+ 36
2^2		+ 1.20	+ 1.78	+ 1.54	+ 2.589	+ 3.1386	+ 3.1537	+ 3.1296
2^3		+ 2.244	− 3.510	− 4.366	+ 5.385	+ 5.250	− 6.123	+ 6.1680
2^4		+ 4.494	+ 7.446	− 9.247	+11.1534	+11.886	+11.674	+12.2822
2^5		+ 9.235	+15.2233	−18.751	+22.2797	+23.564	−24.4556	+24.797
		+18.552	−30. 498	+37. 564	+44 784	+47.318	+49.2073	
		−15. 4	+28. 4	−38.1250	+41. 9	+47.256	−48. 900	
			−22. »	+33. »	−40. »	−44. »		
				+ »	− »			
2^6	+ 1	+18.5516	+30. 502	−37. 686	+44.785	+47.574	+49.1173	+49.635
					+ 1	+ 2.732	+ 4.1495	+ 4.809
						+ 5.536	+ 8.2335	
						− 4.299	− 8.1184	
2^7						+ 5.506	+ 8.105	+ 9.654
						+11.256	+16.1102	
						− 8. 2	−15. 662	
2^8					+ 1	+11.2558	+15. 440	+19.428

En regardant les signes des transformées successives, on voit que les deux premières racines sont réelles, le couple suivant imaginaire; la racine suivante réelle et le dernier couple imaginaire. Les cinq premiers termes de la transformée 2^6 donnent les modules séparés des quatre premières racines; les derniers, à partir de x^3, forment une équation du troisième degré. J'y ai ramené à l'unité le coefficient du premier terme x^3; puis, pour séparer la racine réelle des deux autres, j'ai poussé jusqu'à la transformée 2^8. On déduit de là, en désignant par α, β, γ les racines réelles, par $re^{i\theta}$, $se^{i\omega}$ les racines

(¹) *Traité de la résolution des équations numériques*, page 111.

imaginaires,

$$(1)\quad\left\{\begin{array}{llll} {}^{(1)}\log a^{64} & = +\,18,7416 & \log c^{256} & = 11,4079 \\ \log(ab)^{64} & = +\,30,7007 & \log 2(cs)^{256}\cos 256\omega & = 15,6435 \\ \log 2(abr)^{64}\cos 64\theta & = -\,37,8363 & \log(cs^2)^{256} & = 19,6314 \\ \log(abr^2)^{64} & = +\,44,8949 & & \end{array}\right.$$

Voici d'abord le calcul des racines réelles déduit des égalités (1) :

$$(2)\quad\left\{\begin{array}{lll} 64\log a = 18,7416 & \log a = 0,2922 & a = 1,960 \\ 64\log b = 11,9591 & \log b = 0,1869 & b = 1,538 \\ 256\log c = 11,4079 & \log c = 0,0451 & c = 1,109 \end{array}\right.$$

Pour déterminer les signes de ces racines, je dois substituer les valeurs obtenues dans l'équation proposée mise sous la forme (n° 2)

$$x(x^6 - 2x^4 - 3x^2 - 5) + 4x^2 + 6 = 0.$$

D'après cela, γ est visiblement positif. De plus, le produit des trois racines étant négatif, une des racines α ou β est positive et l'autre négative; c'est visiblement la première qui est négative. On a donc finalement

$$(3)\qquad \alpha = -1,960,\qquad \beta = +1,538,\qquad \gamma = +1,109.$$

Pour les modules des deux couples d'imaginaires, on déduit des égalités (1)

$$(4)\quad\left\{\begin{array}{ll} \log(r^2)^{64} = 14,1942 & \log(s^2)^{256} = 8,6235 \\ \log r \phantom{)^{64}} = 0,1091 & \log s \phantom{)^{256}} = 0,0168 \\ r = 1,286 & s = 1,039 \end{array}\right.$$

Veut-on les arguments? On peut obtenir d'abord $\cos 64\theta$ et $\cos 256\omega$ ainsi

$$(5)\quad\left\{\begin{array}{llll} \log r^{64} & = \,7,0971 & \log s^{256} & = \,4,3117 \\ \log 2r^{64} & = +\,7,3981 & \log 2s^{256} & = +\,4,6127 \\ \log 2r^{64}\cos 64\theta & = -\,7,1356 & \log 2s^{256}\cos 256\omega & = +\,4,2356 \\ \hline \log\cos 64\theta & = -\,0,7375 & \log\cos 256\omega & = +\,\bar{1},6229 \\ \multicolumn{2}{r}{64\theta = 56^\circ,1 + 180^\circ + k.360^\circ} & \multicolumn{2}{r}{256\omega = 65^\circ,2 + k'.360^\circ} \end{array}\right.$$

---

(1) Conformément à un usage des astronomes, je place le signe du nombre devant son logarithme. Il ne peut pas en résulter de confusion, puisque le signe du logarithme porte toujours sur la caractéristique seule.

Pour lever l'indécision qui résulte des élévations au carré répétées, on peut remonter les transformées successives jusqu'à l'équation proposée en écrivant chaque équation sous la forme (n° 2)

$$x\varphi(x^2) + \psi(x^2) = 0$$

et y remplaçant x^2 par la dernière valeur obtenue. Dans l'exemple actuel, où le nombre des couples d'imaginaires ne dépasse pas deux, on peut encore s'adresser aux relations entre les coefficients et les racines, savoir

$$(6)\qquad \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + 2r\cos\theta \quad + 2s\cos\omega \quad = 0, \\ \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma} + 2r^{-1}\cos\theta + 2s^{-1}\cos\omega = +\dfrac{5}{6}. \end{cases}$$

On en tirerait les valeurs de θ et de ω.

On obtient

$$(7)\qquad \theta = 59^\circ,95, \qquad \omega = 72^\circ,87.$$

L'équation proposée est complètement résolue par les formules (3), (4) et (7).

15. *Troisième exemple :*

$$(1)\qquad x^4 + 4,002x^3 + 14,018\,01x^2 + 20,038\,02x + 25,070\,05 = 0.$$

Voici le calcul de la transformée 2^8 de cette équation :

	x^4.	x^3.	x^2.	x^1.	x^0.
		....	....	....	....
2^7	+1	**−45**.2234	+ **90**.1952	**−134**.785	**+179**.1236
	+1	**+90**.499	**+180**.381	**+269**.616	**+358**.1528
		−90.3904	**−180**.351	**−269**.483	
			+135. »		
2^8	+1	**+90**.1086	**+179**.30	**+269**.133	**+358**.1528

Les signes (−) des coefficients de x^3 et x^1, dans la transformée 2^7, prouvent que l'équation proposée a deux couples de racines imaginaires. De plus, l'influence des doubles produits ne manifeste aucune tendance à disparaître dans le terme en x^2. Le premier couple n'est donc pas près d'être séparé du second (n° 8). Nous devons regarder les deux couples comme ayant le même module (n° 7). Dès lors, pour résoudre l'équation proposée,

je ramène d'abord le module des quatre racines à l'unité en les divisant par leur module commun $r = \sqrt[4]{25,070\,05}$ (n° 10).

J'obtiens la nouvelle équation

$$(2) \qquad y^4 + 1,7885\,y^3 + 2,7997\,y^2 + 1,7885\,y + 1 = 0.$$

Appliquant la méthode des équations réciproques (n° 10), je groupe les termes équidistants des extrêmes, je divise par y^2 et je pose $y + \frac{1}{y} = z$; il vient pour l'équation résolvante

$$(3) \qquad z^2 + 1,7885\,z + 0,7997 = 0.$$

A une racine $re^{\theta i}$ de l'équation (1) répond la racine $e^{\theta i}$ de l'équation (2), et la racine $z = e^{\theta i} + e^{-\theta i} = 2\cos\theta$ de l'équation (3). Or cette équation (3) a une racine double, car on a

$$\frac{p}{2} = +0,894\ \ 25$$

$$\frac{p^2}{4} = +0,799\,68$$

$$q = +0,7997$$

$$\frac{p^2}{4} - q = 0$$

On a donc, pour l'argument commun des deux couples de racines,

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}\frac{p}{2} = -0,44712, \qquad \log\cos\theta = -\bar{1},65042,$$
$$\theta = 180^\circ - (63^\circ 26' 30'').$$

Ce n'est là, en réalité, qu'une approximation; les racines ne sont pas rigoureusement égales; leurs valeurs, connues *a priori*, sont

$$-1,001 \pm 2,003\sqrt{-1}, \qquad -1,000 \pm 2,000\sqrt{-1},$$

d'où l'on déduit pour les arguments

$$80^\circ - (63^\circ 26' 47''), \qquad 180^\circ - (63^\circ 26' 5'').$$

§ IV. — Méthode d'approximation.

16. Soit α la valeur approchée, réelle ou imaginaire, obtenue par une première application de la méthode de Gräffe pour une des racines distinctes ou non de l'équation

$$(1) \qquad 0 = f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m.$$

Cette valeur suffit, dans la plupart des cas, aux ingénieurs et aux physiciens. Mais, comme il n'en sera pas ainsi dans toutes les recherches, il importe de donner une règle mécanique, un moyen sûr et rapide d'obtenir une valeur aussi approchée que l'on veut, sans qu'il soit nécessaire de se préoccuper de certaines conditions théoriques, comme dans la méthode de Newton, par exemple.

Je pose

$$(2) \qquad x = \alpha + z,$$

il vient

$$(3) \qquad 0 = f(\alpha + z) = f(\alpha) + \frac{z}{1} f'(\alpha) + \frac{z^2}{1.2} f''(\alpha) + \ldots + \frac{z^m}{m!} f^m(\alpha).$$

On verra que cette équation est toujours très facile à résoudre, avec telle approximation que l'on veut; qu'on sait toujours à l'avance exactement quel est l'effort à faire, quels sont les nombres à calculer pour n'exécuter aucun calcul superflu. Mais, comme la formation de l'équation en z serait difficile par la formule (3), il importe d'abord de donner pour cette opération un procédé pratique. Je reproduirai, dans ce but, l'analyse qu'a donnée D. Miguel Mérino dans son excellente exposition de la méthode de Horner ([1]).

17. *Méthode pour obtenir le développement de l'équation* $0 = f(\alpha + z)$. — Il s'agit de calculer, au moyen de α et des coefficients A de l'équation (1), les coefficients B de la formule

$$(4) \qquad f(\alpha + z) = B_0 z^m + B_1 z^{m-1} + \ldots + B_{m-1} z + B_m.$$

Pour cela, dans la formule (4), je remplace z par sa valeur $x - \alpha$ tirée

([1]) Page 244.

ur x la valeur

$$\begin{array}{r} -3,05 \\ +\quad 1081 \\ \hline x=-3,048\,919 \end{array}$$

oximation ne suffit pas, on négligera seulement le premier
ait alors connaître z avec sept à huit chiffres exacts, en ré-
thode de Gräffe l'équation du second degré obtenue. On
geusement de la Table de multiplication de Crelle.
core plus rapide de remplacer z par sa valeur approchée
en z^2, ou bien encore de chercher la transformée en
de l'équation (3) en négligeant le premier terme, enfin de ré-
on en u, limitée aux deux derniers termes. Dans cette deuxième
océder, la méthode coïncide ici avec celle de Newton.
uveau calcul, en se bornant à chercher trois chiffres pour u.
mbres de l'équation (3) ont été divisés par 10^7. Les calculs
tranches de trois chiffres (système à base 1000) avec les
elle :

A_0.	A_1.	A_2.
$-\bar{4}.915$	$+2,09\,075$	$-2,26\,250$
»	$-\quad 99$	$+2,25\,694$
$-\bar{4}.915$	$+2,08\,976$	$-\underline{0,00\,556}=B_2$
	$-\quad 99$	
$-\bar{4}.915$	$+\underline{2,08\,877}=B_1$	
$-\underline{\bar{4}.915}=B_0$		

déduit pour u, évalué en unités du premier chiffre cherché,

$$u=\frac{556}{208,877}=2,66 \qquad \text{(Règle à calcul).}$$

nt ainsi pour x

$$\begin{array}{r} -3,04\,892 \\ +\quad 266 \\ \hline x=-3,04\,891\,734 \end{array}$$

e de bien remarquer que tout ceci n'est pas un résumé des cal-
u en supprimant les opérations fastidieuses : c'est la reproduction
on calcul même, sans omettre un seul chiffre.

A_0.	A_1.	A_2.	A_3.
$+1$	0	-7	$+7$
	$-3{,}05$	$+9{,}3025$	$-7{,}02\,2625$
$+1$	$-3{,}05$	$+2{,}3025$	$-\underline{0{,}02\,2625}$
	$-3{,}05$	$+18{,}605$	
$+1$	$-6{,}10$	$+\underline{20{,}9075} = B_2$	
	$-3{,}05$		
$\underline{+1}$	$-\underline{9{,}15} = B_1$		
$\underline{+1} = B_0$			

Résultat :

$$f(\alpha + z) = z^3 - 9{,}15\,z^2 + 20{,}9075\,z - \ldots$$

RÈGLE PRATIQUE. — *Écrire sur une première ... polynôme $f(x)$; laisser une ligne en blanc et l... sième ligne, le premier coefficient cherché ... première; puis, pour en calculer un coeffi... le dernier nombre obtenu à la troisième li... de la racine ($\alpha = -3{,}05$); écrire le prod... la colonne suivante et ajouter les deux n... dans cette colonne. Souligner le derni... sième ligne. On passera de même de la ... en négligeant le coefficient souligné, ... soulignés sont ceux de l'équation en z...*

19. J'ai maintenant à résoudre l'équ...

(2) $z^3 - 9{,}15\,z^2 + 20{,}90\ldots$

seulement celle des valeurs de z que ... conduit à multiplier par 1000 les ... évalué en unités du premier chiffre ...

(3) $z^3 - 9150\,z^2 + 20\ldots$

Si je néglige les deux premiers ... car ces termes altèrent seulem... constant. J'ai ainsi

$$z = \frac{+22\,625}{20\,907}\ldots$$

.ode de Gräffe. — Résolution nu-
-cendante dont le premier membre
iable.

équation transcendante est suscep-
quation

$$\ldots + i \sin\varphi)$$

es par la formule

$$\ldots + i(\varphi + 2k\pi)$$

es les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$.
umérique ne peut pas embrasser cette infi-
s dépassent toute limite, et l'on ne conçoit
puisse poser un pareil problème. Nous di-
mérique complète consiste à trouver toutes
cercle donné aussi grand qu'on voudra, et
n voudra.

) une fonction que je suppose d'abord holo-
On peut la développer suivant la formule de

$$\ldots f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^n(0) + \mathrm{R}.$$

; s'il en était autrement, je considérerais la fonc-
olomorphe, comme la première.

ouver un rang n pour lequel R sera négligeable de-
les valeurs de x comprises dans le cercle donné. Je
al des racines cherchées, on peut négliger R. En effet,
uille vérifier qu'un nombre x est racine de $f(x)$ au
pement (1). Le terme $f(0)$ se réduira avec la somme
i ε est l'erreur relative tolérée sur x, ces termes sont af-
latives égales à ε, 2ε, ..., $n\varepsilon$. L'erreur relative de leur
oins ε, c'est-à-dire que l'erreur absolue sur cette somme
o). Le terme R n'influe donc pas sur la vérification consi-

dérée; donc ce terme n'influe pas non plus sur le calcul des racines à l'approximation demandée. L'équation, ainsi limitée au terme de degré n, pourra être résolue par la méthode de Gräffe. Les calculs se font ici en commençant par les termes de degrés les plus faibles. On s'arrêtera à la première racine qui se trouvera sortir du cercle donné.

Ce qu'on vient de dire s'applique évidemment au cas où $f(x)$ n'est holomorphe que dans un certain cercle, pourvu qu'on ne cherche que des racines comprises dans ce cercle.

23. *Application.* — *Calcul de* π. — Soit à trouver, à l'approximation de la règle à calcul, la racine comprise entre o et $\frac{\pi}{4}$ de l'équation

$$(1) \qquad \frac{1}{2} = \sin x.$$

A l'avance on sait qu'on doit trouver $x = \frac{\pi}{6}$. Cet exemple servira donc, en quelque sorte, de vérification à la théorie; il montre aussi comment la méthode de Gräffe fournit une infinité de manières de calculer le rapport de la circonférence au diamètre. L'équation (1) s'écrit

$$(2) \qquad \frac{1}{2} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}\cos\theta x;$$

x^7 est plus petit que 1, $\cos\theta x$ également; donc, quand on opère avec la règle à calcul, le dernier terme est négligeable devant $\frac{1}{2}$. Je chasse le dénominateur 2 et je fais tout passer dans le premier membre. Il vient

$$(3) \qquad 0 = 1 - 2x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{60}.$$

Je réduis les fractions en décimales et j'applique la méthode de Gräffe, en ayant soin de pousser aussi loin que possible un calcul nécessaire d'une colonne et de ne faire un calcul à une colonne suivante que s'il est nécessité par le calcul d'une colonne précédente. De cette façon on évite des calculs qui seraient inutiles ici, puisque l'on cherche, non pas les cinq racines de l'équation (3), mais seulement la première. Voici ce calcul :

	x^0.	x^1.	x^2.	x^3.	x^4.	x^5.
2^0	+1	− 2	0	+ $\bar{1}$.3333	0	− $\bar{2}$.1666
		+ 4	+ 0	+ $\bar{1}$.1111	+ 0	
		0	+ 0.1333	0	+ $\bar{2}$.1111	
		»	0	666	»	
2^1		+ 4	+ 0.1333	+ $\bar{1}$.1777	+ $\bar{2}$.1111	
		+ 1.16	+ 0.1777			
		− 2666	− 1423			
			+ 22			
2^2		+ 1.1333	+ $\bar{1}$.377			
		+ 2.1777				
		− 7				
2^3	+1	+ 2.1770				

De la dernière transformée on tire

$$8 \log x = \bar{3},75203,$$
$$\log x = \bar{1},71900,$$
$$x = 0,5236.$$

Vérification :

$$6x = 3,1416.$$

On le voit, le calcul se trouve plus précis que nous n'avions demandé.

24. *Caractères de supériorité de la méthode. — Application à l'Astronomie et à la Physique.* — L'artifice qui consiste à ne faire un calcul à une colonne que lorsqu'il est nécessité par une colonne précédente constitue le plus remarquable caractère de supériorité de la méthode. Il rend en effet superflue, dans la pratique, la précaution, si utile à la théorie, de fixer d'abord le nombre des termes à conserver dans la série. Par là on évite une perte de temps, un effort d'intelligence et le risque d'aller trop loin par une évaluation trop large. Mais, il y a plus. Voulons-nous maintenant la deuxième racine $\pi - \frac{\pi}{6}$ de l'équation (1)? Il n'y aura rien à recommencer. Tous les calculs exécutés pour trouver la première racine sont nécessaires pour chercher la deuxième. Il y aura seulement à ajouter des termes aux colonnes; peut-être des colonnes nouvelles? Mais toujours mécaniquement et à mesure des besoins, jusqu'à ce que le coefficient de x^2, devenu régulier, fasse connaître la deuxième racine cherchée.



On prévoit aisément les importants services que doit rendre la méthode précédente en Astronomie et en Physique, où l'on rencontre des équations transcendantes, développables en séries. En Astronomie, par exemple, on résoudrait l'équation bien connue

$$u - e \sin u = nt$$

par rapport à u, comme je viens de l'expliquer, en se bornant à la plus petite racine.

25. *Extension de la méthode d'approximation.* — Supposons qu'avec la précision définitivement demandée à la racine, la série puisse être limitée au terme de degré n (n° 22). L'équation s'écrira

$$0 = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n.$$

A cette équation algébrique, je peux appliquer la méthode d'approximation du § IV; mais il convient ici de commencer le calcul par les premiers termes, qui sont les plus importants, et par suite de calculer la correction qu'il faut porter à la valeur approchée de l'*inverse* de la racine. Par là on évite, comme plus haut (n° 24), la détermination *a priori* du rang n où il faut limiter la série; car, dans la pratique, il suffira de s'arrêter quand on constatera que l'influence des termes suivants disparaît. Si l'on se reporte à la notation et à la disposition de calcul qui précèdent (n° 18), on voit qu'il faudra s'arrêter dans le sens horizontal quand le terme A_{n+1} deviendra négligeable devant le produit par α du dernier nombre obtenu (¹). D'après une remarque précédente (n° 20), le calculateur peut aussi s'arrêter juste à temps dans le sens vertical. De cette façon, il n'exécutera que la partie strictement nécessaire des calculs.

26. *Application à l'équation* $\frac{1}{2} = \sin x$. — D'après le calcul précédent (n° 23) on a, pour la valeur approchée de x,

$$\operatorname{colog} x = 0,281\,00,$$
$$\frac{1}{x} = 1,9099.$$

(¹) On peut se demander ce qui arrive quand on dépasse le terme A_n où il convient de s'arrêter, en supposant A_{n+1} négligeable. Au lieu de l'équation $f(\alpha + z) = 0$ qu'on aurait obtenue, on obtient, dans cette hypothèse, l'équation $(z + \alpha) f(\alpha + z) = 0$, laquelle admet les mêmes racines que la première.

Pour faciliter les calculs par la Table de Crelle, je remplace cette valeur par

$$\alpha = 1,91.$$

J'obtiens le calcul suivant dont la disposition est expliquée par ce qui précède (nos 18, 19, 20); je cherche 9 chiffres à $\frac{1}{x}$:

x^0.	x^1.	x^2.	x^3.	x^4.	x^5.
+1	− **0**.2	0	+ $\bar{\mathbf{1}}$. 333 333 333 33	0	− $\bar{\mathbf{2}}$. 166 666 666
	+ 191	− $\bar{\mathbf{1}}$. 17 19	− 328 329	+ $\bar{\mathbf{3}}$. 955 827 666	+ 182 563 084
+1	− $\bar{\mathbf{2}}$. 9	− $\bar{\mathbf{1}}$. 17 19	+ $\bar{\mathbf{3}}$. 5 004 333 33	+ $\bar{\mathbf{3}}$. 955 827 666	+ $\bar{\mathbf{3}}$. 15 896 418
	+ 191	+ 347 62	+ 6311 213	+ 1206 397 51	+ 230 604 49
+1	+ **0**.182	+ **0**. 330 43	+ **0**.6316 217 333	+ **1**.1207 353 34	+ **1**. 230 620 39
	+ 191	+ 716 16	+ 200	+ 512	+ 1207
	+ **0**.373	+ **1**.1046 6	+ **1**.263	+ **1**.632	+ **2**.1437

x^6.	x^7.	x^8.	x^9.
0	+ $\bar{\mathbf{4}}$. 396 825 396	0	− $\bar{\mathbf{6}}$. 55 117
+ $\bar{\mathbf{3}}$. 303 621 584	+ 5799 172 7	+ $\bar{\mathbf{2}}$. 118 343 564	+ 226 036 207
+ $\bar{\mathbf{3}}$. 303 621 584	+ $\bar{\mathbf{3}}$. 6195 998 1	+ $\bar{\mathbf{2}}$. 118 343 564	+ $\dot{\mathbf{2}}$.225 981 090 = B_9
+ 4404 849 4	+ 84138422	1607 162 18	
+ **1**. 4405 153 0	+ **1**. 84144617	+ **2**.1607 280 52 = B_8	
+ 2746	+ 608		
+ **2**.3186	+ **2**.692 = B_7		

$$z = \frac{-B_9}{B_8} = -\bar{\mathbf{4}}.141.$$

Deuxième correction :

	+ **2**.692	+ **2**.160 728 052	+ $\bar{\mathbf{2}}$.225 981 090
		− 97 572	− 226 488 977
− $\bar{4}$,141	+ **2**.692	+ **2**.160 630 480	− $\bar{\mathbf{5}}$. 507 887

$$u = +\bar{\mathbf{7}}.\frac{5079}{1606} = \bar{\mathbf{7}}.316.$$




On déduit de ces deux corrections, pour $\frac{1}{x}$,

$$\begin{aligned}
\alpha &= +1,91 \\
z &= - 0141 \\
u &= + 316 \\
\hline
\frac{1}{x} &= 1,909\,859\,316
\end{aligned}$$

Cette valeur doit représenter $\frac{6}{\pi}$; si donc on la divise par 6, on doit retrouver la valeur connue de $\frac{1}{\pi}$. On obtient, en effet,

$$\frac{1}{6x} = 0,318\,309\,886 = \frac{1}{\pi}.$$

§ VI. — Application à la Physique.

Détermination du rapport $\theta = \frac{\lambda}{2\mu}$ *des coefficients d'élasticité de Lamé.*

27. *Résultats de la théorie de Kirchhoff sur les vibrations d'une plaque circulaire* ([1]). — Les lignes nodales qui correspondent à un son quelconque de la plaque sont des cercles et des diamètres qui la divisent en portions égales. Le son fondamental répond à 2 diamètres et 0 cercle. Dans les autres cas, on obtient des harmoniques. Soient

n le nombre des nœuds diamétraux;
m le nombre des cercles;
$v_{n,m}$ le nombre des vibrations correspondantes à n et m.

Pour calculer v au moyen de n, m et des constantes physiques de la plaque, on a la formule suivante

$$(1) \qquad v_{n,m} = x_{n,m}^2 \frac{4\varepsilon}{\pi l^2} \sqrt{\frac{q(1+2\theta)^2}{3\rho(1+\theta)(1+3\theta)}},$$

où l'on représente par

2ε l'épaisseur de la plaque;
l son rayon;
q son coefficient d'élasticité;
ρ sa densité;
$\theta = \frac{\lambda}{2\mu}$ le rapport des coefficients d'élasticité de Lamé;
$x_{n,m}^2$ le carré de la $(m+1)^{\text{ième}}$ des racines de l'équation

$$(2) \qquad 0 = (4\gamma - 1)n^2(n-1) - A_1 x^4 + A_2 x^8 - A_3 x^{12} + \ldots,$$

dans laquelle on a

$$(3) \quad \begin{cases} \gamma = \dfrac{1+2\theta}{1+\theta}, \\ A_k = \dfrac{4\gamma(n+2k)(n+2k+1)[n(n-1) - 2k + 4\gamma k(n+k)] - n^2(n^2-1)}{1.2.3\ldots k \times (n+1)(n+2)\ldots(n+k) \times (n+1)(n+2)\ldots(n+2k+1)}. \end{cases}$$

([1]) *Comptes rendus*, t. XXIX, p. 753; 1849.

28. *Méthode pour la détermination de θ au moyen des sons rendus par une plaque* (¹). — L'équation (2) est de la forme $F(x, n, \theta) = 0$; $x^2_{n,m}$ est donc une fonction de θ, et cette fonction est variable avec n et m. Je la représente par $f_{n,m}(\theta)$. On déduit de l'équation (1)

$$\frac{v_{n,m}}{v_{2,0}} = \frac{f_{n,m}(\theta)}{f_{2,0}(\theta)} = \varphi_{n,m}(\theta). \tag{4}$$

Pour les diverses valeurs de θ, $\varphi_{n,m}(\theta)$ peut être calculé par les formules (1), (2), (3). On en dressera une Table. L'observation du son fondamental rendu par la plaque et de l'harmonique (n, m) fait connaître $v_{2,0}$ et $v_{n,m}$. Entrant dans la Table avec l'argument $\frac{v_{n,m}}{v_{2,0}} = \varphi_{n,m}(\theta)$, on en déduit θ. En observant de nouveaux harmoniques, on a autant de vérifications.

La résolution de l'équation (2) est, on le voit, fondamentale dans la méthode. Je vais donner cette résolution pour $\theta = 1$, $n = 0$, en me limitant à deux racines.

29. *Résolution de l'équation du problème dans le cas* $\theta = 1$, $n = 0$. Je pose $x^4 = X$ et je ramène le premier coefficient à l'unité. Puis je remplace les coefficients par les valeurs numériques particulières au cas actuel. Enfin, j'applique la méthode de Gräffe. J'obtiens le calcul suivant pour les transformées :

	X^0.	X^1.	X^2.	X^3.	X^4.	X^5.
2^0	$+1$	$-\bar{1}.5966$	$+\bar{3}.957$	$-\bar{5}.2848$	$+\bar{8}.264$	$-\overline{11}.1004$
		$+\bar{1}.\ 356$	$+\bar{5}.916$	$+\overline{10}.811$	$+\overline{16}.697$	
		$-\bar{2}.\ \ 19$	$-\bar{5}.341$	$-\overline{10}.506$	$-\overline{16}.$ »	
			$+\bar{8}.\ \ \ 5$	$+\overline{11}.\ 12$	»	
2^1		$+\bar{1}.\ 337$	$+\bar{5}.5755$	$+\overline{10}.317$	$+\overline{16}.$ »	
		$+\bar{1}.1136$	$+\bar{9}.331$	$+\overline{20}.$ »		
		$-\bar{4}.\ \ \ 1$	$-\overline{10}.\ 21$	»		
			$+\overline{16}.$ »	»		
2^2		$+\bar{1}.1135$	$+\bar{9}.310$	$+\overline{20}.$ »		

Les deux premières racines sont visiblement séparées entre elles et des

(¹) *Comptes rendus, loc. cit.*, et Notes de M. Mercadier, 11 et 25 juillet, 1er août 1887 et 2 juillet 1888.

..s. On en conclut

$$X_0^{-4} = (x_0^2)^{-8} = +\bar{1},1135; \qquad 8\log\left(\frac{1}{x_0^2}\right) = +\bar{1},055\,c$$

$$(X_0 X_1)^{-4} = (x_0^2 x_1^2)^{-8} = +\bar{9}.310; \qquad 8\log\left(\frac{1}{x_0^2 x_1^2}\right) = +\bar{9},491$$

$$8\log\left(\frac{1}{x_0^2}\right)^2 = \bar{2},11000$$

$$8\log(x_0^2 x_1^2) = 8,50864$$

$$8\log\left(\frac{x_1^2}{x_0^2}\right) = 6,61864; \qquad \log\left(\frac{x_1^2}{x_0^2}\right) = 0,82733$$

$$\frac{\varphi_{2,1}}{\varphi_{2,0}} = \frac{x_1^2}{x_0^2} = 6,715$$

...sultats. — On obtient ainsi le nombre écrit en caract
...ableau ci-dessous. Ce Tableau, tiré du Mémoire de Kirc
valeurs de $\frac{\varphi_{n,m}}{\varphi_{2,0}} = \varphi_{n,m}(\theta)$ pour diverses valeurs de n e
$\frac{1}{2}$ et $\theta = 1$. Toutes peuvent être obtenues comme la pr
...bleau :

Valeurs de $\varphi_{n,m}(\theta)$ pour $\theta = \frac{1}{2}$ et $\theta = 1$.

$\theta = \frac{1}{2}$.			$\theta = 1$.			
$n = 1$.	$n = 2$.	$n = 3$.	$n = 0$.	$n = 1$.	$n = 2$.	n
∞	1,000	2,312	∞	∞	1,000	2
3,703	6,403	9,645	1,728	3,907	**6,711**	10
..838	»	»	7,334	11,400	»	

...ître $\varphi_{n,m}(\theta)$ pour les valeurs de θ intermédiai
trouve pour le premier harmonique ($n = 0$,

..5	0,6	0,7	0,8	0,9	
..	1,639	1,663	1,685	1,706	

...ombres intermédiaires par interpolation

des deux extrêmes, on trouve les nombres

1,613 1,636 1,659 1,682 1,705 1,728

qui coïncident avec les précédentes à l'approximation du calcul. Cette approximation est largement suffisante dans la question qui nous occupe. On peut donc se contenter de cette interpolation, et le Tableau de Kirchhoff suffit à résoudre le problème de la détermination de θ par l'étude des plaques vibrantes.

TABLE DES MATIÈRES

DU MÉMOIRE DE M. E. CARVALLO.

§ V. — Deuxième extension de la méthode de Gräffe. — Résolution numérique complète d'une équation algébrique transcendante dont le premier membre est une fonction holomorphe de la variable.

§ VI. — Application a la Physique.

Détermination du rapport $\theta = \frac{\lambda}{2\mu}$ *des coefficients d'élasticité de Lamé.*

ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE.

LA

GÉOMÉTRIE RÉGLÉE

ET SES APPLICATIONS,

PAR M. G. KOENIGS,

Maître de Conférences à l'École Normale et à la Sorbonne.

INTRODUCTION.

Dans une branche de la Géométrie qui touche aux points les plus essentiels de toutes les autres, et dont le développement a été un des termes de l'évolution de la Science pendant toute la première partie de ce siècle, il semble bien difficile de donner avec certitude le nom de l'inventeur. C'est à Plücker que l'on attribue généralement la gloire de cette invention, et cependant ni l'idée des congruences de droites, ni même celle des complexes n'ont reçu de lui leur première consécration. Tout le monde reconnaît que les propriétés des congruences remontent aux premières recherches d'optique géométrique; mais, pour ce qui est des complexes, on paraît trop disposé à oublier que Malus les a conçus le premier dans son *Traité d'Optique*, et qu'il est parvenu dans ce sujet à une proposition capitale, mentionnée ultérieurement par Chasles dans son Rapport sur un intéressant Mémoire de Transon sur le groupement des droites d'un complexe en congruences de normales à une surface. Il est très remarquable que la proposition de Malus touche de fort près à un autre ordre d'idées, dont nous aurons occasion de parler, et qui a été développé d'une façon magistrale par M. Sophus Lie.

On trouvera plus loin, dans la partie historique, les citations exactes qui corroborent les affirmations actuelles. Il n'en reste pas moins à Plücker l'immortel mérite d'avoir entrevu le rôle de la droite dans la Géométrie et d'avoir, sinon

pratiqué, au moins indiqué une méthode pour grouper sou[illegible]
les grands principes de la géométrie projective appelés par [illegible]
et *dualité*.

Mais il n'a pas été donné à Plücker de cueillir les fruits [illegible]
les faire prospérer et mûrir, il ne fallait rien moins que l[illegible]
mètre universellement estimé et qui s'est également [illegible]
M. Klein a repris les idées de Plücker en les appuyant su[illegible]
gèbre moderne. La symétrie et l'élégance de ses résulta[illegible]
concerne les complexes quadratiques, lui ont attiré à ju[illegible]
géomètres.

Nous aurons occasion, dans le cours de cette étude, [illegible]
noms très justement dignes d'être cités; mais les trava[illegible]
cette branche de la Géométrie méritent une mention [illegible]
géomètre a établi les liens les plus étroits entre la géo[illegible]
théorie des équations différentielles; il a, en quelque so[illegible]
maine transcendant une doctrine qui peut paraître [illegible]
exclusivement algébrique.

J'arrêterai ici les noms que je veux citer dans cette [illegible]
faire double emploi avec la Notice historique qui accom[illegible]
certain que la Géométrie réglée doit beaucoup à MM. [illegible]
Chasles, Battaglini, mais les trois noms de Plücker, K[illegible]
risent en quelque sorte trois phases de la doctrine d[illegible]
pourquoi je les ai placés en tête de la présente étude (¹)[illegible]

(¹) Ce travail est une reproduction partielle d'un Cours que j'ai [illegible]
de France.

ractère par dualité aussi bien que
un système E_p, par exemple, aura
si l'on traduit le théorème de telle
ul dans son énoncé, la proposition
nguée.

ee, non plus par ses points ou ses
été ainsi conduit à des propriétés
méthode.

odes de génération; elle est le lieu
ui tourne autour d'elle. Plücker ap-
de points, et *axe* la droite considérée
yé dans tant d'acceptions, et, d'autre
nous ne trouvons pas d'avantage à
te peu qu'une droite soit considérée
turellement l'un et l'autre, et ce n'est
à établir une telle distinction; bien
lle reste indifférente à toute transfor-
ar Plücker tient donc plutôt à l'imper-
libérer de la considération encom-
naire. Dans les travaux de M. Klein
ts que l'on y rencontre sont *dualis-*
rment par dualité en éléments iden-
ion dès le début, en définissant les
abord que nous nous écartons de
ntrer.

orté à des coordonnées homogènes
nnées d'un point x, et

$$\xi_4 x_4 = 0$$

ξ_4 seront les coordonnées homogènes
int x et le plan ξ sont *unis,* c'est-

upent suivant une droite D, et

ξ_4

plans menés par la droite D et par
pour équations, en coordonnées



struction, nous obtenons un nouveau mode de définition que nous caractérisons en disant que la figure est *réglée*. La figure réglée vient donc se placer naturellement à côté des figures ponctuelles et planaires. Mais l'avantage de ce mode de définition apparaît immédiatement si l'on observe qu'une droite a pour transformée une droite *par dualité aussi bien que par homographie;* car il en résulte aussitôt que la transformée d'une figure réglée soit par dualité, soit par homographie, est une autre figure réglée, ce que l'on peut exprimer en disant que l'*espace réglé* se transforme en un espace de même nom et *par homographie* et *par dualité*.

La théorie des figures réglées est donc en quelque sorte la suprême expression de la grande évolution géométrique inaugurée par Poncelet, Gergonne et Chasles, et qui, bien loin de s'arrêter, tend au contraire à pénétrer jusque dans la géométrie transcendante.

Tout théorème concernant une figure ponctuelle, planaire ou réglée, pourra s'appeler *ponctuel, planaire, réglé*. Il est clair que tout théorème non réglé donne lieu à une proposition conjuguée, à savoir celle que l'on en déduit par polaires réciproques. De là le nom de *géométrie en partie double* qui sert à rappeler l'habitude qu'ont quelques géomètres d'opposer à tout théorème non réglé son théorème conjugué. Par l'emploi des droites ce double énoncé disparaît, un seul suffit pour les deux propositions. On en verra bientôt un exemple dans la géométrie de la gerbe et dans celle du système plan.

Pour rendre plus claire l'idée dominante de ce paragraphe, considérons une courbe dans l'espace. On peut y voir d'abord un ensemble de points dépendant d'un paramètre, savoir les points de la courbe; on peut y voir aussi un ensemble de plans dépendant du même paramètre, à savoir les plans osculateurs; enfin on peut y voir un ensemble de droites dépendant toujours du même paramètre, à savoir les tangentes de la courbe. La connaissance de l'un quelconque de ces trois ensembles suffit pour définir tous les autres au moyen d'opérations différentielles faciles à exécuter. Néanmoins, une étude approfondie des transformations géométriques a montré qu'il y avait lieu de les distinguer les uns des autres et de porter son attention, suivant les cas, tantôt sur l'un, tantôt sur l'autre, bien qu'ils soient, en fait, inséparables. Représentons donc provisoirement par E_p, E_π, E_d l'ensemble des points d'une courbe, l'ensemble de ses plans osculateurs et l'ensemble de ses tangentes. Si l'on effectue une transformation homographique, chacun de ces ensembles se transformera dans un ensemble identique E'_p, E'_π, E'_d. Effectuons, au contraire, une transformation dualistique; E_p se changera en un système E'_π et E_π se changera dans le système E'_p attaché à E'_π; mais, en revanche, le système E_d se changera dans le système E'_d. Ainsi, il y aura cet avantage à définir les ensembles attachés à une courbe au moyen de l'ensemble E_d des tan-

. nous trouverons que la droite co

$q_{\alpha 3}, \quad q_{\alpha 4}$ (on voit que $q_{\alpha\alpha} = 0$);

$q_{13}, \quad q_{14}),$

$q_{23}, \quad q_{24}),$

$0, \quad q_{34}),$

$q_{43}, \quad 0);$

logue à Δ

$x_3 \quad x_4$

$y_3 \quad y_4$

$x_3 \quad x_4$

$y_3 \quad y_4$

est nulle :

$+ q_{14} q_{23} = 0.$

ités $q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{34}, q_{42}, q_{23}$ liées
que, grâce à la seule condition (8)
$- q_{ik}$, sont sur une même droite D

nouveau système de coordonnées q
nsidérée comme lieu de points. D'apr
de dualité que nous devons conserv
tôt le droit de choisir le système de c
es p. Mais heureusement nous n'a
trouvent être identiques.
sentée par les équations (3) et e
et y; nous aurons

$p_{14} x_4 = 0,$

$p_{14} y_4 = 0;$

$$= \frac{p_{14}}{x_1 y_2 - x_2 y_1},$$

$$\frac{p_{13}}{q_{42}} = \frac{p_{14}}{q_{23}};$$

courantes X_i,

$$(3)\quad \begin{cases} * + p_{12}X_2 + p_{13}X_3 + p_{14}X_4 = 0, \\ p_{21}X_1 + \quad * \quad + p_{23}X_3 + p_{24}X_4 = 0, \\ p_{31}X_1 + p_{32}X_2 + \quad * \quad + p_{34}X_4 = 0, \\ p_{41}X_1 + p_{42}X_2 + p_{43}X_3 + \quad * \quad = 0. \end{cases}$$

Si l'on développe le déterminant nul

$$0 = \Delta = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix},$$

on trouve

$$(4)\quad \Delta = 2(p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23}) = 0.$$

Prenons réciproquement six quantités p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23}, liées par l'équation (4), et formons les équations (3) en convenant que $p_{ki} = -p_{ik}$, on vérifie par un calcul facile que les quatre plans (3), *en vertu de* (4), se coupent suivant une même droite D; on vérifie encore fort aisément que si par cette droite on fait passer deux plans ξ, η, le binôme $(\xi_i, \eta_k - \eta_i\xi_k)$ est proportionnel à p_{ik}. Donc, six quantités

$$p_{12},\ p_{13},\ p_{14},\ p_{34},\ p_{42},\ p_{23},$$

liées par l'équation

$$(5)\quad p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0,$$

définissent complètement une droite par le moyen des équations (3), où il est entendu que $p_{ki} = -p_{ik}$. Mais nous devons hésiter encore à adopter ces six quantités p pour coordonnées de la droite à cause de l'absence de tout caractère dualistique dans la définition de ces quantités. Nous les avons en effet obtenues, par le moyen des équations (2) et (3), en regardant la droite D comme intersection de deux ou de plusieurs plans.

Pour lever la difficulté, il suffira de faire appel à la définition corrélative.

Prenons deux points x, y sur la droite : tout point de cette droite sera représenté par les coordonnées

$$z_i = lx_i + my_i,$$

où l, m sont deux paramètres. Cherchons la trace de cette droite sur le plan $z_\alpha = 0$; en posant

$$(6)\quad \sigma q_{ik} = x_i y_k - y_i x_k,$$

…s X_1 et X_2 entre (12) et (12′): nous trouverons

$$(r_{13}r'_{12} - r'_{13}r_{12})X_3 + (r_{14}r'_{12} - r'_{14}r_{12})X_4 = 0,$$
$$(r_{23}r'_{12} - r'_{23}r_{12})X_3 + (r_{24}r'_{12} - r'_{24}r_{12})X_4 = 0;$$

…tion de rencontre, nécessaire et suffisante, est donc

$$\begin{cases} (r_{13}r'_{12} - r'_{13}r_{12})(r_{24}r'_{12} - r'_{24}r_{12}) \\ -(r_{14}r'_{12} - r'_{14}r_{12})(r_{23}r'_{12} - r'_{23}r_{12}) = 0, \end{cases}$$

…s'écrit

$$r'^2_{12}(r_{13}r_{24} - r_{14}r_{23}) + r^2_{12}(r'_{13}r'_{24} - r'_{14}r'_{23})$$
$$+ r'_{12}r_{12}(-r_{13}r'_{24} - r'_{13}r_{24} + r_{14}r'_{23} + r'_{14}r_{23}) = 0;$$

…on a

$$r_{12}r_{34} + r_{13}r_{42} + r_{14}r_{23} = 0,$$

plus $r_{24} = -r_{42}$; on a ainsi

$$r_{13}r_{24} - r_{14}r_{23} = r_{12}r_{34},$$
$$r'_{13}r'_{24} - r'_{14}r'_{23} = r'_{12}r'_{34},$$

l'équation (13) devient

$$r_{12}r'_{12}(r_{12}r'_{34} + r'_{12}r_{34} + r_{13}r'_{42} + r'_{13}r_{42} + r_{14}r'_{23} + r'_{14}r_{23}) = 0.$$

Nos calculs supposent que r_{12} et r'_{12} ne sont pas nuls, hypothèse sans importance. La condition cherchée s'écrira donc

(14) $$r_{12}r'_{34} + r_{13}r'_{42} + r_{14}r'_{23} + r_{34}r'_{12} + r_{42}r'_{13} + r_{23}r'_{14} = 0.$$

Mais, si l'on se reporte à l'expression de $\omega(r)$,

$$\omega(r) = 2(r_{12}r_{34} + r_{13}r_{42} + r_{14}r_{23}),$$

le premier membre de l'équation (14) peut s'écrire

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\omega(r)}{\partial r_{12}}r'_{12} + \frac{\partial\omega(r)}{\partial r_{13}}r'_{13} + \frac{\partial\omega(r)}{\partial r_{14}}r'_{14} + \frac{\partial\omega(r)}{\partial r_{23}}r'_{23} + \frac{\partial\omega(r)}{\partial r_{34}}r'_{34} + \frac{\partial\omega(r)}{\partial r_{42}}r'_{42}\right];$$

on représente généralement cette expression par le symbole

$$\omega(r, r') = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial r_{12}}r'_{12} + \ldots + \frac{\partial\omega}{\partial r_{23}}r'_{23}\right),$$

la condition de rencontre s'exprimera donc par l'équation

(15) $$\omega(r, r') = 0.$$



on aurait, de même,

$$p_{21}x_1 + p_{23}x_3 + p_{24}x_4 = 0,$$
$$p_{21}y_1 + p_{23}y_3 + p_{24}y_4 = 0,$$

d'où

$$\frac{p_{21}}{x_3y_4 - y_3x_4} = \frac{p_{23}}{x_4y_1 - y_4x_1} = \frac{p_{24}}{x_1y_3 - y_1x_3},$$

c'est-à-dire

$$\frac{p_{12}}{q_{34}} = \frac{p_{23}}{q_{14}} = \frac{p_{42}}{q_{13}};$$

de la troisième des équations (3) on tirerait de même que ces rapports égaux sont encore égaux à $\frac{p_{34}}{q_{12}}$, ensuite qu'on a définitivement

$$(9)\qquad \frac{p_{12}}{q_{34}} = \frac{p_{13}}{q_{42}} = \frac{p_{14}}{q_{23}} = \frac{p_{34}}{q_{12}} = \frac{p_{42}}{q_{13}} = \frac{p_{23}}{q_{14}},$$

et en rapprochant alors les formules (2) et (6), et en changeant un peu les coefficients de proportionnalité, nous écrirons

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} r_{12} &= \rho(\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2) = \sigma(x_3y_4 - y_3x_4),\\ r_{13} &= \rho(\xi_1\eta_3 - \eta_1\xi_3) = \sigma(x_4y_2 - y_4x_2),\\ r_{14} &= \rho(\xi_1\eta_4 - \eta_1\xi_4) = \sigma(x_2y_3 - y_2x_3),\\ r_{34} &= \rho(\xi_3\eta_4 - \eta_3\xi_4) = \sigma(x_1y_2 - y_1x_2),\\ r_{42} &= \rho(\xi_4\eta_2 - \eta_4\xi_2) = \sigma(x_1y_2 - y_1x_3),\\ r_{23} &= \rho(\xi_2\eta_3 - \eta_2\xi_3) = \sigma(x_1y_4 - y_1x_4),\end{aligned}\right.$$

et ce sont ces quantités r_{ik}, susceptibles d'une double signification, que nous adopterons pour coordonnées de la ligne droite; ces coordonnées vérifiant la relation quadratique

$$(11)\qquad \omega(r) = 2(r_{12}r_{34} + r_{13}r_{42} + r_{14}r_{23}) = 0.$$

Cette forme quadratique $\omega(r)$ joue un rôle essentiel. Nous allons établir à son égard une proposition de la plus haute importance.

5. Cherchons la condition de rencontre des deux droites r, r'; pour cela partons des équations (3), la droite r sera l'intersection des deux plans

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} r_{12}X_2 + r_{13}X_3 + r_{14}X_4 &= 0,\\ -r_{12}X_1 + r_{23}X_3 + r_{24}X_4 &= 0,\end{aligned}\right.$$

et la droite r' sera l'intersection des deux plans

$$(12')\qquad \left\{\begin{aligned} r'_{12}X_2 + r'_{13}X_3 + r'_{14}X_4 &= 0,\\ -r'_{12}X_1 + r'_{23}X_3 + r'_{24}X_4 &= 0.\end{aligned}\right.$$

les droites *a*

te fait partie du
aura

donc toute droite *d* qui

Ainsi, *si l'on construit la* FORME POLAIRE $\omega(r, r')$ *relative à deux droites* r, r', *l'évanouissement de cette forme exprime la rencontre des droites* r *et* r'.

Ce fait présente la plus haute importance : grâce à lui nous pourrons désormais nous affranchir de toutes considérations d'espace ponctuel ou planaire qui ne nous ont servi jusqu'ici que comme intermédiaires pour parvenir à cette forme quadratique ω et à la propriété si remarquable de sa forme polaire. *Tout ce qu'il nous suffit de retenir ici, c'est que si l'on choisit six quantités quelconques* r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{34}, r_{42}, r_{23}, *liées par l'équation*

$$\omega(r) = 2(r_{12}r_{34} + r_{13}r_{42} + r_{14}r_{23}) = 0,$$

une droite se trouve définie (peu importe pour le moment comment la construction de la droite peut résulter de cette définition) *et que, de plus, la rencontre de deux droites* r, r' *s'exprime par l'équation* $\omega(r, r') = 0$.

Il est assurément fort digne d'intérêt que cette simple notion de la forme $\omega(r)$ suffise, *sans davantage préciser,* pour édifier toute la géométrie réglée.

6. Notre premier soin sera de donner une vue plus large sur cette forme ω. Si nous exprimons les paramètres r_{ik} en fonction linéaire de six nouveaux paramètres x_i

$$r_{ik} = A_{ik,1}x_1 + \ldots + A_{ik,6}x_6, \tag{16}$$

rien ne nous empêche de prendre $x_1, x_2, \ldots, x_6$ pour nouvelles variables, le déterminant de la substitution linéaire (16) n'étant pas nul. Ces nouvelles variables seront liées par une relation quadratique homogène $\xi(x) = 0$, où la forme $\xi(x)$ *est la transformée de la forme* $\omega(r)$.

Quant à $\omega(r, r')$ sa transformée sera, d'après une propriété bien connue des formes quadratiques, la forme polaire $\xi(x, x')$. Voici, au surplus, la démonstration de ce fait. Soient $(r_{12}, r_{13}, \ldots, r_{23})$, $(r'_{12}, r'_{13}, \ldots, r'_{23})$ deux systèmes de valeurs des r, et $(x_1, x_2, \ldots, x_6)$, $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_6)$ les systèmes de valeurs correspondantes des x. Le système $(x_1 + \lambda x'_1)$, $(x_2 + \lambda x'_2)$, $\ldots$, $(x_6 + \lambda x'_6)$ où λ est une arbitraire, correspondra au système $(r_{12} + \lambda r'_{12})$, $(r_{13} + \lambda r'_{13})$, $\ldots$, $(r_{23} + \lambda r'_{23})$, et l'on aura, par suite,

$$\omega(r + \lambda r') = \xi(x + \lambda x'),$$

d'où

$$\omega(r) + 2\omega(r, r')\lambda + \omega(r')\lambda^2 = \xi(x) + 2\xi(x, x')\lambda + \xi(x')\lambda^2, \tag{17}$$

et, identifiant les coefficients de λ^2, λ, 1, on trouve, outre deux relations évidentes, la relation qu'il fallait trouver, à savoir

$$\omega(r, r') = \xi(x, x'),$$

lle
ici

unées
suite,
st une
sont

r toute-

assujet-
titue un
lroite en-
amètres,
toujours
uvent pas
e. Il y a,
boloïde en
rait pour
confondant
ons déter-
a un grand

coupe a et b; cela ne se peut que si ces droites x sont dans le plan (a, b), comme on le voit en prenant pour d une droite quelconque de ce plan; de même, en prenant pour d une droite quelconque issue du point (a, b), on voit que toutes les droites (18) doivent passer par le point (a, b). Toutes les droites (18) font donc partie du faisceau (a, b). J'ajoute que, réciproquement, toute droite du faisceau (a, b) est représentable par les formules (18). En effet, prenons une droite d *quelconque* coupant une droite arbitraire z du faisceau (a, b); il n'y a qu'une seule droite de ce faisceau qui coupe d (on ne suppose pas que d soit coupée par toutes les droites du faisceau), et cette droite unique c'est la droite z. Or, on peut déterminer λ, μ, de sorte que x coupe d; il suffit de vérifier l'équation

$$\xi(x, d) = \xi(a, d)\lambda + \xi(b, d)\mu = 0;$$

il y a donc une droite (18) qui coupe d, et, comme toutes les droites (18) font partie du faisceau, cette droite (18), qui coupe d et fait partie du faisceau, ne peut être que la droite z qu'on a prise arbitrairement dans le faisceau (a, b); donc toute droite du faisceau (a, b) est identique à une droite et à une droite unique du système (18).

En résumé, si l'on se reporte aux formules (18), à toute valeur de $\lambda:\mu$ répond une droite du faisceau (a, b), et réciproquement. Les formules (18) réalisent donc la représentation du faisceau plan (a, b).

Mais il y a plus, puisque $\lambda:\mu$ et les droites du faisceau se correspondent univoquement, c'est-à-dire puisque à une valeur de $\lambda:\mu$ répond une droite unique, et, inversement, puisqu'à une droite du faisceau ne répond qu'une valeur de $\lambda:\mu$, il en résulte, conformément au principe de correspondance sous sa forme la plus simple, que, si l'on prend quatre droites α, β, γ, δ du faisceau et que l'on désigne par ρ, σ, τ, υ les valeurs correspondantes de $\lambda:\mu$, le rapport anharmonique $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ des quatre droites sera égal au rapport anharmonique $(\rho, \sigma, \tau, \upsilon)$ des rapports correspondants

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\rho, \sigma, \tau, \upsilon). \tag{19}$$

Par exemple, les droites $(\lambda a_i + \mu b_i)$ et $(\lambda a_i - \mu b_i)$ forment avec les droites a et b un faisceau harmonique.

8. Deux droites qui se coupent définissent un faisceau plan; trois droites qui se coupent forment un triangle ou un trièdre. Si elles forment un triangle, toute droite qui les coupe engendre le système des droites d'un plan (système plan). Si elles forment un trièdre, toute droite qui les coupe passe par leur point commun et l'ensemble de ces droites engendre ce que l'on appelle une *gerbe de droites*, c'est-à-dire l'ensemble des droites issues d'un point fixe. La géométrie de

CHAPITRE II.

LES COMPLEXES LINÉAIRES DE DROITES.

Pôle et plan polaire. — Faisceaux du complexe. — Droites conjuguées. — Distribution des pôles et des plans polaires sur une droite du complexe. — Corrélation normale d'un complexe. — Propriétés des droites conjuguées. — Polaires réciproques par rapport à un complexe linéaire. — Représentation analytique. — Complexes spéciaux. — Invariant de M. Klein. — Droites conjuguées.

13. Un complexe est dit *linéaire* lorsqu'il est du premier degré, c'est-à-dire lorsque, parmi les droites d'un faisceau arbitraire, il n'y en a qu'une qui fasse partie du complexe. Le cône du complexe se réduit à un plan, et la courbe enveloppe dans un plan se réduit à un point (lieu de classe 1). De là ce double théorème :

Les droites d'un complexe linéaires issues d'un point P *engendrent un plan,* qu'on appellera le PLAN POLAIRE du point.

Les droites d'un complexe linéaire tracées dans un plan passent par un point fixe de ce plan, le *foyer* ou PÔLE de ce plan.

Il existe donc dans l'espace une infinité de faisceaux dont toutes les droites font partie du complexe; ce sont les faisceaux définis par un point et son plan polaire, ou, ce qui revient au même, par un plan et son pôle. Nous appellerons ces faisceaux les *faisceaux du complexe linéaire* (¹).

14. On peut faire découler les propriétés du complexe linéaire d'une proposition unique, dont la démonstration est des plus aisées.

Considérons l'ensemble d'un plan Π *et d'un point* O *situé dans ce plan, le pôle* O′ *du plan* Π *est dans le plan polaire* Π′ *du point* O.

Autrement dit, si un point O et un plan Π sont UNIS (*voir* n° 3), leurs correspondants polaires dans le complexe sont un plan Π′ et un point O′ UNIS. En effet, la droite OO′ fait partie du complexe, puisqu'elle passe au point O′ et qu'elle est dans le plan polaire Π de ce point; mais alors elle doit être contenue dans le

(¹) On peut comparer avec ce que nous appelons plus loin, dans le cas général d'un complexe quelconque, *les faisceaux du complexe*.

plan Π', qui est le polaire du point O de cette droite. Le plan Π' contient donc le point O'. C. Q. F. D.

Soient une droite d ne faisant pas partie du complexe; O un point de cette droite; Π un plan mené par cette droite. D'après le théorème précédent, le pôle de Π est dans la polaire de O; mais, comme O est un point quelconque de la droite d, Π un plan quelconque mené par cette droite, on peut conclure que *les pôles de tous les plans menés par une droite sont situés dans les plans polaires de tous les points de cette droite.*

Il en résulte immédiatement :

1° Que *les polaires de tous les points d'une droite d sont des plans qui se coupent suivant une même droite d'*;

2° Que *cette droite d' est le lieu des pôles des plans menés par la droite d.*

Le pôle d'un plan mené par d est donc le point où il perce d', et le pôle d'un plan mené par d' est le point où il perce d. Les droites d et d' sont ainsi dans une situation réciproque l'une vis-à-vis de l'autre; on les appelle *droites conjuguées.*

Les remarques suivantes sont d'un usage fréquent :

Toute droite x, qui coupe deux droites conjuguées d, d', fait partie du complexe.

Considérons le plan $\Pi(d, x)$ mené par d et par x, le pôle de ce point est à sa rencontre avec d', c'est-à-dire précisément au point $P(d', x)$ de rencontre de x et de d'. La droite x du plan $\Pi(d, x)$ se trouve donc passer au pôle $P(d', x)$ de ce plan; il est ainsi acquis qu'elle fait partie du complexe.

Toute droite du complexe, qui coupe une droite d, coupe aussi sa conjuguée d'.

Considérons, en effet, le plan $\Pi(d, x)$, que l'on peut mener, par hypothèse, par d et par x; la droite x de ce plan, faisant partie du complexe, doit passer au pôle de ce plan. Or ce pôle est la trace du plan sur la droite d'; la droite x coupera donc d' en ce point.

Deux couples de droites conjuguées forment quatre droites portées par une même quadrique.

Soient, en effet, a, a' et b, b' les deux couples de droites conjuguées, et considérons la quadrique engendrée par une droite x s'appuyant sur a, a', b. Les génératrices x de cette quadrique font partie du complexe, puisqu'elles coupent a et a', et, comme elles coupent b, il faut alors qu'elles coupent aussi b'. Donc a, a', b, b' sont quatre génératrices du second système.

Généralement, supposons que les génératrices x d'un système d'une quadrique



fassent partie d'un complexe linéaire; considérons une génératrice y du second système, et soit y' sa conjuguée : cette conjuguée est nécessairement une autre génératrice du même système que y. En effet, toutes les génératrices x coupent y, et, comme elles font partie du complexe, il faut qu'elles coupent y'. Nous parvenons ainsi à ce résultat que, si une quadrique est engendrée par des droites x faisant partie d'un complexe linéaire, les génératrices du second système se trouvent associées deux à deux en couples de droites conjuguées. Nous donnerons à ces quadriques le nom de *quadriques du complexe*.

Faisons, en terminant ce numéro, les remarques suivantes :

Nous avons supposé, au début, que la droite d ne faisait pas partie du complexe. Si elle appartient au complexe, elle est à elle-même sa propre conjuguée, car elle est le lieu des pôles de ses plans et l'enveloppe des plans polaires de ses points.

Si une droite d ne fait pas partie du complexe, il est impossible qu'elle coupe sa conjuguée d'; car, si P était le point de rencontre, tout plan mené par d aurait son pôle au point P, et la droite d, passant par P et tracée dans ce plan, ferait partie du complexe.

15. Considérons quatre plans Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 menés par une droite ne faisant pas partie du complexe, et soient P_1, P_2, P_3, P_4 les pôles de ces plans. On obtient ces pôles en coupant le faisceau des quatre plans par la droite d', conjuguée de d. *Le rapport anharmonique des quatre pôles est* donc *égal à celui des quatre plans.*

Il est intéressant de démontrer que cette proposition s'étend encore au cas de plans passant par une droite appartenant au complexe.

Soient, en effet, d une droite du complexe et a, a' deux droites conjuguées ne coupant pas d. Considérons la quadrique engendrée par une droite x s'appuyant sur a, a' et d. Cette quadrique sera une quadrique du complexe, puisque x coupe les droites conjuguées a et a'. Menons un plan Π par la droite d : ce plan coupe la quadrique, outre d, suivant une génératrice x qui vient couper d au point de contact P du plan Π avec la quadrique. Mais il passe en P deux droites du complexe contenues dans le plan Π, savoir d et x. Donc P est le pôle du point Π. De là cette conséquence : le pôle d'un plan mené par d est justement le point de d où ce plan est tangent à la quadrique.

Mais on connaît le beau théorème de Chasles sur la distribution du plan tangent le long d'une génératrice rectiligne d'une quadrique. Le rapport anharmonique de quatre plans menés par cette génératrice est égal à celui des quatre points de contact de ces plans avec la surface.

Il résulte donc de ce théorème, joint à la remarque précédente, que *si, par une droite d d'un complexe, on mène quatre plans, le rapport anharmonique*

des pôles de ces plans est égal à celui des plans eux-mêmes. D'après ce théorème, tout complexe linéaire définit sur chacune de ses droites une correspondance homographique entre les points et les plans de cette droite (¹). Une telle correspondance se retrouve fréquemment dans les figures réglées, et j'ai cru utile de lui attribuer un nom spécial, celui de *corrélation anharmonique* ou simplement de *corrélation*.

Nous pouvons donc dire que tout complexe linéaire définit une corrélation sur chacune de ces droites, à savoir celle qui relie un point de la droite à son plan polaire; et, pour distinguer cette corrélation de toutes les autres que l'on pourrait imaginer sur cette droite, je lui donnerai le nom de *corrélation normale du complexe* (²).

16. Dans les numéros précédents, nous avons vu qu'un complexe linéaire fournit un moyen de transformation dans lequel un point a pour transformé un plan, un plan un point, et une droite une autre droite. Nous allons étendre cette remarque et obtenir ainsi un résultat qui offre de l'importance à plusieurs points de vue.

Rappelons tout d'abord ce théorème, démontré au nº **14** :

I. *Si un point* O *et un plan* Π *sont unis, leurs éléments correspondants sont un plan* Π′ *et un point* O′, *unis eux aussi.*

Voici d'autres théorèmes où figurent les droites :

II. *Si une droite d passe par un point* O, *sa conjuguée d′ est tracée dans le plan* Π′ *polaire de* O, *et réciproquement.*

Ce théorème est une conséquence immédiate de la définition des droites conjuguées.

III. *Si deux droites a et b se coupent, leurs conjuguées a′, b′ se coupent aussi.*

En effet, puisque *a* et *b* passent par un même point O, leurs conjuguées *a′*, *b′*, en vertu du théorème précédent, sont dans un même plan Π, polaire de O.

Il résulte immédiatement de là qu'aux droites d'un faisceau correspondent les droites d'un faisceau; à tous les plans et droites menés par un point O correspondent tous les points et droites tracés dans le plan Π′, polaire de O.

Nous avons déjà dit que l'on donne le nom de *gerbe* à l'ensemble des plans et

---

(¹) J'appellerai dorénavant *plan d'une droite* tout plan mené par cette droite.
(²) On verra plus loin une extension de cette notion au cas d'un complexe quelconque.

des droites issus d'un point, et de système plan à l'ensemble des points et des droites d'un plan. On peut donc dire qu'une gerbe a pour figure correspondante un système plan, et inversement.

Considérons généralement une figure $\mathfrak{F}$ composée de points, de droites et de plans, en prenant les éléments correspondants de tous ceux de la figure $\mathfrak{F}$, on engendrera une figure $\mathfrak{F}'$, que nous dirons être la réciproque de $\mathfrak{F}$. Aux points en ligne droite de $\mathfrak{F}$ correspondront des plans de $\mathfrak{F}'$ passant par une droite, et inversement; aux droites issues d'un point les droites d'un plan, et inversement: aux plans menés par un point les points d'un plan, et inversement, etc.

A un polyèdre $\mathfrak{P}$ correspondra un polyèdre $\mathfrak{P}'$ dans lequel : 1° les arêtes seront conjuguées des arêtes de $\mathfrak{P}$; 2° les sommets seront les pôles des plans des faces de $\mathfrak{P}$; 3° les plans des faces seront les polaires des sommets de $\mathfrak{P}$.

A une surface S non développable de la figure $\mathfrak{F}$ considérée comme lieu d'un point O répondra dans $\mathfrak{F}'$ une surface S' définie comme enveloppe du plan Π', polaire de O, et le point de contact O' de Π' avec la surface S' sera le pôle du plan Π tangent en O à la surface S, en sorte que la surface S' est aussi le lieu des pôles des plans tangents de S. On pourra encore remarquer que le faisceau des tangentes à la surface S au point O a pour réciproque le faisceau des tangentes en O' à la surface S'. On peut donc définir encore la surface S' comme l'enveloppe des droites conjuguées des tangentes de la surface S.

Soit encore une courbe C, que nous pourrons définir soit comme lieu d'un point O, soit comme enveloppe de la tangente d en ce point, soit comme enveloppe du plan Π osculateur en O. Le lieu du pôle O' du plan Π est une courbe C': considérons trois plans osculateurs à la courbe C, Π, Π_1, Π_2 infiniment voisins, et soient O', O'_1, O'_2 leurs pôles, qui sont trois points de C', le plan de ces trois points est le plan osculateur en O' à la courbe C', et il a pour pôle le point d'intersection des trois plans Π, Π_1, Π_2, c'est-à-dire le point O.

On pourrait donc encore définir la courbe C' comme l'enveloppe des plans polaires des points de la courbe C.

Enfin, prenons deux points voisins O, O_1 sur la courbe C, la droite d, ou OO_1, a pour polaire l'intersection d' des plans Π', Π'_1, polaires des points O et O_1, et qui sont deux plans osculateurs voisins de la courbe C'. La droite d' est donc tangente à la courbe C'. De là ce théorème qui implique une troisième définition de la courbe C' :

Les polaires d' des tangentes d d'une courbe gauche C *enveloppent une courbe gauche* C'.

C'est ici le cas de rappeler les distinctions faites à la fin du n° 1; il est clair que, si l'on considère les systèmes E_P, E_Π, E_d de la courbe, ils se transformeront

L'ensemble des droites qui coupent une droite fixe z forme donc un complexe linéaire. Mais on s'aperçoit aisément que ce n'est pas là le complexe linéaire le plus général. Identifions, en effet, une fonction linéaire quelconque des x avec $\omega(z, x)$; nous aurons

$$(3) \qquad \frac{\frac{\partial\omega}{\partial z_1}}{A_1} = \frac{\frac{\partial\omega}{\partial z_2}}{A_2} = \frac{\frac{\partial\omega}{\partial z_3}}{A_3} = \ldots = \frac{\frac{\partial\omega}{\partial z_6}}{A_6}.$$

On tirera de ces équations linéaires en $z_1, z_2, \ldots, z_6$ les valeurs de ces quantités, ou plutôt de leurs rapports, et, en portant ces valeurs dans $\omega(z)$, cette forme deviendra une forme homogène quadratique en $A_1, A_2, \ldots, A_6$,

$$(4) \qquad \omega(z) = \Omega(A);$$

cette forme $\Omega(A)$ est la *forme adjointe* de la forme $\omega(z)$.

Si donc les z_i sont les coordonnées d'une droite z, il faut que $\Omega(A)$ soit nul.

Si $\Omega(A)$ est nul, les valeurs des z_i tirées des équations (3) sont, d'après (4), les coordonnées d'une droite, et cette droite, d'après les équations (3), est coupée par toutes les droites du complexe linéaire

$$\Sigma A_i x_i = 0.$$

On donne le nom de *complexe spécial* à un pareil complexe, et la droite z en est appelée la *directrice* ou encore l'*axe*. Mais, le mot *axe* ayant été employé avec tant d'acceptions dans cette même théorie des droites, le mot *directrice* paraît préférable.

Lorsque l'expression $\Omega(A)$ n'est pas nulle, le complexe linéaire ne possède pas de directrice; mais la considération de la forme $\Omega(A)$ n'en demeure pas moins intéressante. M. Klein l'appelle l'*invariant du complexe*. Ce nom d'invariant se justifie par la remarque suivante :

Si l'on effectue sur les variables x_i une transformation linéaire, les coefficients A_i d'une forme linéaire de x_i se trouvent transformés, comme on sait, par la transformation réciproque, et la forme $\Omega(A)$ est ce que l'on appelle un *contrevariant* de la forme $\omega(z)$; ce qui signifie que $\Omega(A)$ se reproduit, multipliée par une puissance (la seconde) du déterminant de la substitution directe.

Si, par exemple, on a ramené la forme $\omega(x)$ au type de Plücker,

$$\omega(x) = 2(x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6),$$

la forme $\Omega(A)$ sera la suivante :

$$\Omega(A) = 2(A_1A_4 + A_2A_5 + A_3A_6).$$

Si, au contraire, on a ramené, comme nous verrons que l'a fait M. Klein, la

forme $\omega(x)$ à une somme de carrés, savoir

$$\omega(x) = K_1 x_1^2 + K_2 x_2^2 + \ldots + K_6 x_6^2,$$

on aura

$$\Omega(A) = \frac{A_1^2}{K_1} + \frac{A_2^2}{K_2} + \ldots + \frac{A_6^2}{K_6}.$$

On ne s'est pas préoccupé, dans le commencement du Chapitre, du cas du complexe spécial. Il est clair que, dans ce cas, les droites de l'espace ont toutes une même conjuguée, savoir la directrice, et que toutes les propriétés relatives à la transformation par polaires réciproques se trouvent en défaut.

19. Supposons donc qu'il s'agisse d'un complexe non spécial et soit z une droite quelconque; cherchons sa conjuguée u. J'observe, à cet effet, que des trois équations

$$\Sigma A_i x_i = 0,$$
$$\omega(z, x) = 0,$$
$$\omega(u, x) = 0,$$

une doit être la conséquence des deux autres : car toute droite du complexe qui coupe une droite coupe sa conjuguée et toute droite qui coupe deux droites conjuguées fait partie du complexe.

Pour parvenir aisément au résultat, j'observe que l'on a identiquement

$$\sum A_i x_i = \sum \frac{\partial \Omega}{\partial A_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \quad (^1),$$

et les trois équations que nous avons à considérer peuvent s'écrire

$$\sum \frac{\partial \Omega}{\partial A_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = 0, \qquad \sum z_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = 0, \qquad \sum u_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = 0;$$

---

(1) En effet, si l'on pose

$$Z_i = \frac{\partial \omega}{\partial z_i},$$

on trouve, par définition de la forme adjointe,

$$\omega(z) = \Omega(Z);$$

il en résulte

$$d\omega = d\Omega = \sum \frac{d\Omega}{\partial Z_i} dZ_i.$$

Mais on a aussi

$$d\omega = \sum \frac{\partial \omega}{\partial z_i} dz_i = \sum Z_i \, dz_i,$$

et, comme ω est homogène,

$$2\omega = \sum \frac{\partial \omega}{\partial z_i} z_i = \sum Z_i z_i;$$

d'où

$$2\, d\omega = \Sigma Z_i \, dz_i + \Sigma z_i \, dZ_i,$$



d'après la remarque déjà faite qu'elles doivent se réduire à deux, on doit pouvoir trouver deux quantités λ, μ, telles que

$$(5) \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial A_i} = \lambda z_i - \mu u_i.$$

Exprimons que $u_1, u_2, \ldots$ sont les coordonnées d'une droite, on trouvera

$$\omega\left(\frac{\partial\Omega}{\partial A} - \lambda z\right) = 0$$

ou

$$\omega\left(\frac{\partial\Omega}{\partial A}\right) - 2\lambda\,\omega\left(\frac{\partial\Omega}{\partial A} \,\middle|\, z\right) = 0,$$

en se souvenant que $\omega(z) = 0$. On a d'ailleurs

$$\omega\left(\frac{\partial\Omega}{\partial A}\right) = \Omega(A), \qquad 2\,\omega\left(\frac{\partial\Omega}{\partial A} \,\middle|\, z\right) = \sum \frac{\partial\omega\left(\frac{\partial\Omega}{\partial A}\right)}{\partial\left(\frac{\partial\Omega}{\partial A_i}\right)} z_i = \sum A_i z_i,$$

il vient donc

$$(6) \qquad \Omega(A) - \lambda \Sigma A_i z_i = 0.$$

Cette équation (6) fait connaître λ, et les équations (5) fourniront les coordonnées de la droite u conjuguée de z.

Ce calcul suppose que $\Sigma A_i z_i$ n'est pas nul, c'est-à-dire que z ne fait pas partie du complexe.

La forme symétrique des équations (5) met bien en évidence la réciprocité des droites z et u.

Il serait facile, en partant des formules (5), de trouver une démonstration algébrique des diverses propriétés des droites conjuguées déjà établies géométriquement; nous laissons ce soin au lecteur.

(A suivre.)

(¹) ou enfin, par soustraction,

$$d\omega = \Sigma z_i\, dZ_i.$$

En identifiant avec $d\omega = \sum \frac{\partial\Omega}{dZ_i} Z d_i$, on a donc

$$z_i = \frac{\partial\Omega(Z)}{\partial Z_i} = \frac{\partial\Omega\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)}{\partial\frac{\partial\omega}{\partial Z_i}},$$

et par suite nous avons bien

$$\sum A_i x_i = \sum A_i \frac{\partial\Omega\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)}{\partial\frac{\partial\omega}{\partial x_i}} = \sum \frac{\partial\Omega(A)}{\partial A_i}\frac{\partial\omega}{\partial x_i}.$$

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME TROISIÈME.

ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE.

FIN DU TOME TROISIÈME.


STORAGE AREA
G.E.STECHERT
& Co.
NEW YORK

